

京都教育大学

2024 年度 修了論文

平行移動と軌跡

－ I C T を導入した教科書作成－

京都教育大学 大学院連合教職実践研究科

教職実践専攻 教科研究開発高度化系

教科学習探究コース 数理自然・技術プログラム

小泉 太志

指導教員： 黒田恭史 教授

中村力 准教授

目次

第1章 序論

第1節 研究背景	3
第2節 研究目的	4
第3節 研究方法	4

第2章 教科書に記載する内容について

第1節 平行移動と軌跡の共通点が分かる例題	4
第2節 日常に出てくる一般例	5
第3節 目次について	7

第3章 作成する教科書の内容について

第1節 分野について	7
第2節 ICT教材の導入について	8

第4章 教科書に導入したICT教材について

第5章 GeoGebraを用いた授業実践とアンケート調査

第1節 授業実践の概要	15
第2節 授業実践の構成	15
第3節 授業実践の結果と分析	15
第4節 授業実践後のアンケート調査の結果と分析	19

終わりに

引用・参考文献

巻末資料

第1章 序論

本章では研究背景、研究目的と方法について論じる。

第1節 研究背景

村上（2012）は、軌跡の解法で決められた3つの手順が存在しており、数学的になぜそのような手順が必要なのかについて、様々な軌跡の問題を取り上げて研究し明らかにされている。またその3つ目の作業がなぜ必要なのかという質問をよく受ける。それを疑問に思う生徒がいるのは仕方がないことだと村上は述べている。

3つの手順は次のように述べられている。

1. 求める軌跡上の動点の座標を (x,y) と表し、与えられた条件を座標の間の関係式で表す。
2. 軌跡の方程式を導き、その方程式の表す図形 を求める。
3. その図形上の点が条件を満たしていることを 確かめる。（これが明らかな場合は、これを 省略することがある）

長谷川（1966）では、軌跡の指導について1・2年生それぞれでどのような授業をすれば良いかなどを考えている。堀田（2022）は、軌跡の理解の困難性となっている要素を解消するためにはどのような指導をすれば良いかを考えている。そこで私はこれら先行研究から、どのような授業をすればわかりやすい授業になるのかを研究したいと考えた。

また久富（2014）は、高校生Iクラス（40人）を対称に中学校までの関数の理解状況を把握するための事前調査を入学直後のクラス全員同時に50分間で実施した。その中で特徴的な結果が出た問題の1つの解答類型を表にまとめてみる。そこで $y = ax + b$ の a, b が変化するとき、どのようにグラフが変化していくかの理解が不十分である生徒が多いことが分かると久富（2014）は述べている。

また宮川ら（2014）は、平行移動の証明を授業で行うためにはどのようにすれば良いかを考えて述べている。

これらの先行研究からも平行移動を生徒が理解するのは困難であることが分かる。平行移動の分野でわかりやすい授業を考えるにあたって、平行移動と軌跡の分野が融合している教科書を作成すれば、そのヒントが生まれると思い教科書作成を行うことにした。この教科書を作成することで二つの分野の関係を知ることができると考えた。また教科書を生徒の目線になって作成することで、どのようなものが分かりやすいのか、どのような表記が適しているか、様々なことをじっくり考えることができ、授業のスキルも向上すると考えた。

本研究の一つ目の目的は、平行移動と軌跡の指導の特徴について検討すること。そのためいくつかの先行研究や教材分析をとうして平行移動と軌跡の特徴を分析する。

軌跡の分野について先行研究からどのような内容が生徒にとって理解するのが困難であるのかを考えた。また教科書をよく読み、どのような意図で記載されているのか、なぜその順番で分野が構成されているのか、なぜそのような解説が必要なのかなどを考えた。

本研究の二つ目の目的は、高校生を対象に平行移動の効率的な指導法を考案すること。そのために平行移動と軌跡の合同分野の教科書を作成するという手法を用いて研究を行っ

た。教科書の作成では、主に Word を使用し、GeoGebra などの ICT の要素を加えてより最新の教材になる教科書を作成する。ICT を利用した授業実践や教材は、生徒や児童の学習意欲を向上させたり学習の理解を促進させたりするということが、河田ら（2023）・栗島ら（2020）・芝辻（2022）・松村ら（2021）・齊藤ら（2017）の先行研究で述べている。

教科書が完成した後は、実際にその教材を使って高校生を対象に授業を行って理解度を検証する。

第2節 研究目的

本研究では、次の点を目的とする。

- （1）平行移動と軌跡の指導の特徴について検討する
- （2）高校生を対象に平行移動・軌跡の効果的な指導法を考案する

第3節 研究方法

本研究の方法を以下の点にする。

- （1）先行研究や教科書分析を通してその特徴を分析する
- （2）ICTを導入した教科書を作成し、高校生に対して検証する

第2章 教科書に記載する内容について

本章では教科書の中に記載する内容をどのように考えたのかを記載する。

第1節 平行移動と軌跡の共通点が見える例題

例題1. 放物線 $y = 2x^2$ を f とする。 f を x 軸方向に 3、 y 軸方向に 4 だけ平行移動して得られる放物線を g とする。 g を求めよ。

（解） 放物線 f の方程式 $y = 2x^2$ の x を $x - 3$ 、 y を $y - 4$ で置き換えると

$$y - 4 = 2(x - 3)^2$$

よって、求める放物線 g の方程式は

$$y = 2x^2 - 12x + 22$$

（別解） g 上に任意の点 $P(x, y)$ をとり、問いの平行移動によって点 P に移される f 上の点 $Q(X, f(X))$ とする。ここで放物線 f により $Q(X, 2X^2)$ と表せる。点 P と点 Q の関係性より

$$x = X + 3$$

$$y = Y + 4$$

これが点 P の条件になります。これにより点 Q の座標は

$$(x-3, y-4)$$

となり、点 Q は放物線 f 上の点なので

$$y-4 = 2(x-3)^2$$

整理すると

$$y = 2x^2 - 12x + 22$$

故に、

この条件を満たす点 P の軌跡は放物線 f を平行移動した放物線 g となります。

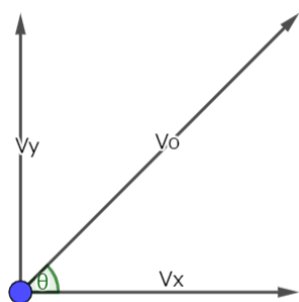
逆に放物線 g 上の任意の点 P(x, y) は、条件を満たす。

この例題は、二つの解き方を考えたものである。(解) では通常の平行移動の解き方である。(別解) では軌跡の解き方である。このように軌跡の考え方が平行移動でも使えるので、この関連を使って教科書作成時には平行移動と軌跡のつなぎとしたいと考えている。

第2節 日常に出てくる一般例

放物線とはボールを投げた時の軌道のことである。ではなぜ放物線のグラフというのでしょうか。結論を言うと、 a, b, c を実数の定数として、ものを投げた時のその軌道は $y = ax^2 + bx + c$ で表されるからである。

これについての証明は $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ など三角比の知識や物理的な知識が必要である。



初速度 V_0

投げる角度 θ

ボールの質量 m

重力加速度 g

$V_0 \neq 0$ 、 $\theta \neq 90$

図 2-1, ボールの初速度

- ・ 原点から初速度 V_0 、角度 θ で投げる。
- ・ t 秒後におけるボールの位置 (x, y) を求める。
 x 軸方向と y 軸方向の速度をそれぞれ V_x, V_y とする
- ・ x 軸方向には等速運動をするから

$$V_x = V_0 \cos \theta$$

$$x = V_0 \cos \theta \times t \quad \text{①}$$

・y軸方向には重力が加わり等加速度運動をする。

よって

$$\begin{aligned} Vy &= Vo \sin \theta - gt \\ y &= Vo \sin \theta \times t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \quad (2)$$

・①,②の式から t を消去すると

・①を変形した $t = \frac{x}{Vo \cos \theta}$ を②に代入して

$$\begin{aligned} y &= Vo \sin \theta \times \frac{x}{Vo \cos \theta} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{Vo \cos \theta}\right)^2 \\ &= \frac{Vo \sin \theta}{Vo \cos \theta} \times x - \frac{1}{2}g \frac{x^2}{Vo^2 \cos^2 \theta} \\ &= -\frac{g}{2Vo^2 \cos^2 \theta} x^2 + \tan \theta \times x \end{aligned}$$

ここで $a = -\frac{g}{2Vo^2 \cos^2 \theta}$, $b = \tan \theta, c=0$, と置くと、これらはもとに実数より放物線の方程式と一致する。

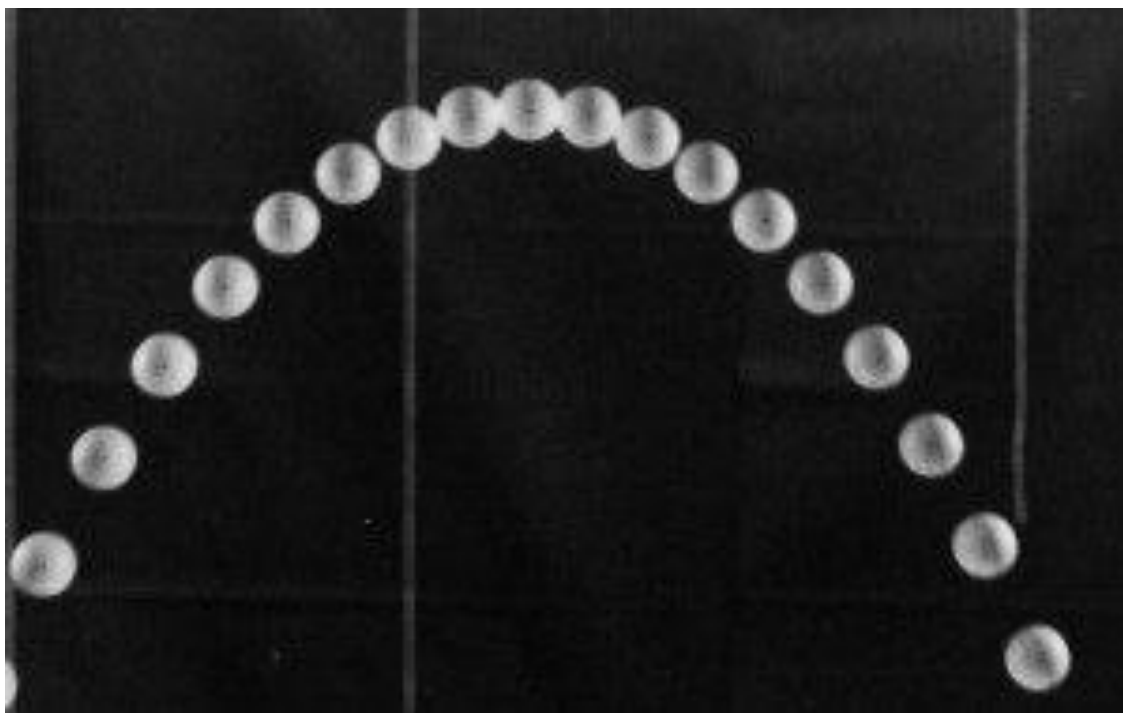


図 2-2, ボールを投げたときの軌道の写真

この例は二次関数の例ではわかりやすいが、高校一年生にはまだ難しい内容なので Extra として単元の最後に記載しようと考えている。

第3節 目次について

まず分野を考えて適切な順番を考えて目次を作成した。

- ・放物線を描くグラフ
- ・軌跡
- ・円の方程式と軌跡
- ・ $y = ax^2$ のグラフ
- ・点の移動
- ・2次関数の平行移動
- ・ $y = ax^2 + q$ のグラフ
- ・ $y = a(x - p)^2$ のグラフ
- ・ $y = a(x - p)^2 + q$ のグラフ
- ・平方完成
- ・ $y = ax^2 + bx + c$ のグラフ
- ・軌跡と平行移動の関係
- ・放物線の平行移動
- ・extra

<これで何時間分か>

現在約 10～12 時間の想定

第3章 作成する教科書の内容について

本章では、平行移動と軌跡を合同分野とした場合、どのようなカリキュラムになるのかを数研出版の教科書を分析することにより考える。

第1節 分野について

まずは二次関数とはどのようなものか、一般的な例を交えて学ばせる。放物線がどのようなグラフか、それを一般的な例などを使って考える。その次に軌跡とはどのようなものか、円の方程式を交えて学ばせる。次に二次関数のグラフが放物線であることを学ぶ。次に点の移動を学ばせ、その後に二次関数の平行移動の様々なパターンを学ばせる。次に平方完成を学び、頂点を求めるための手段であることを理解させる。最後に軌跡と平行移動が関係している例題をもとに関係性を学ぶ。

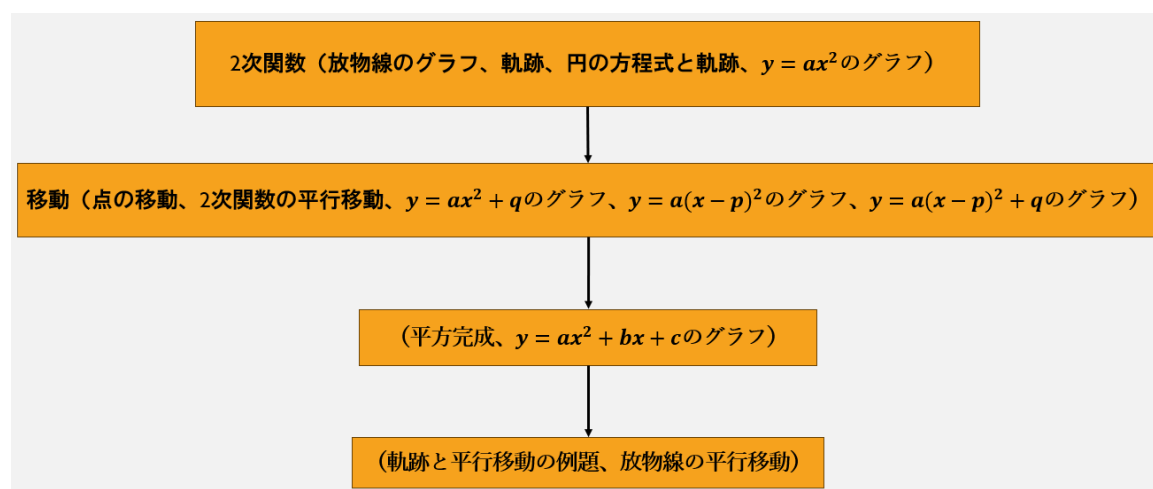


図 3-1,分野の流れ

第 2 節 ICT 教材の導入について

平行移動や軌跡の分野は、通常の教科書だけでは理解することが困難だと考えたため、教科書の中に ICT 教材を導入することを考えた。その際は GeoGebra というオンラインサービスを利用する。GeoGebra で作成した教材を QR コードにして教科書の中に導入することで生徒がいつでも閲覧できるようにし、主体的な学習もできるようにする。

数学を教える・学ぶためのGeoGebra

数学学習・数学教育用の無料のデジタルツール（授業教材、グラフ作成、幾何学、共同作業用のホワイトボード等）

アプリの開始

教材集



図 3-2,GeoGebra
の表紙

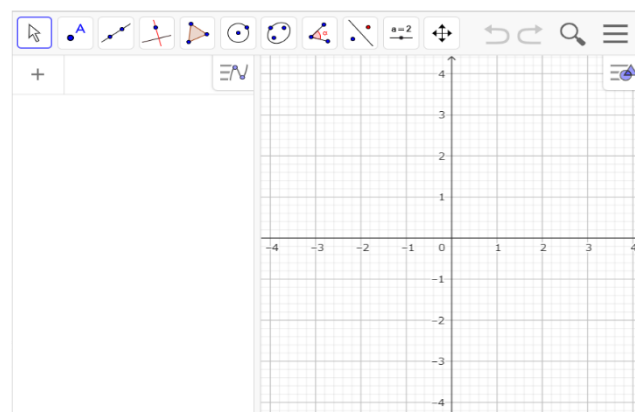


図 3-3,GeoGebra
のワークシート作
成画面

第4章 教科書に導入したICTについて

本章では、完成した教科書内に導入しているQRコードを読み取った場合どのようなものが見ることができるか紹介していく。使用しているICT教材はGeoGebraである。

ICT1のQRコードでは、「投げる」ボタンを押すとボールを投げる軌道を確認することができる。この軌道の残像で2次関数のグラフとボールの軌道が一致していることが視覚的に分かる。実際にQRコードを読み取った際に図6のように表示される。

ボールを投げる軌道

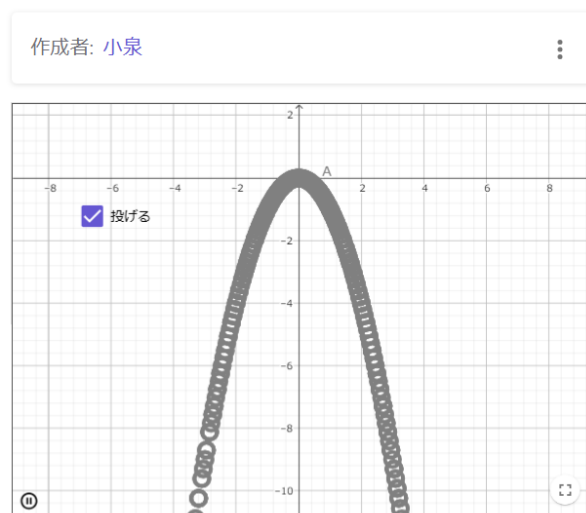


図4-1 ICT1

ICT2のQRコードでは、「動かす」ボタンを押すと条件を満たしているときに、点Cがどのようなグラフを描くか分かる。点Cの残像が描かれることでどのようなグラフになるのか視覚的に理解できる。実際にQRコードを読み取った際に図7のように表示される。

円と軌跡

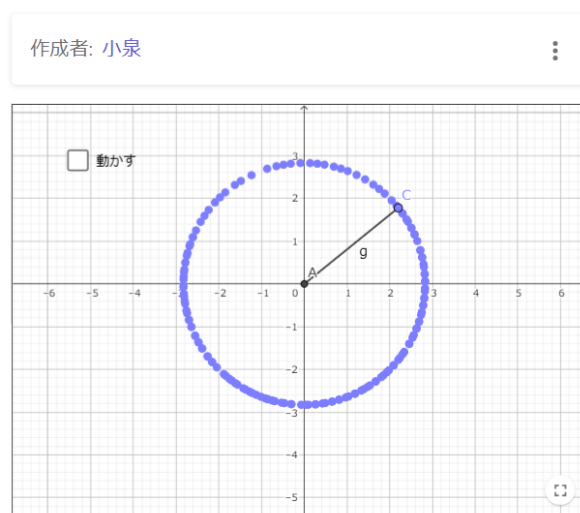


図4-2 ICT2

練習1のQRコードでは、円の方程式を求めるために円の中心の座標や半径の情報を入力して、それぞれの値が方程式にどのような関係があるのかをみることができ。中心の座標と半径を入力することで、表示されている円の方程式も変化する。これは練習問題を解く上でヒントになる。実際にQRコードを読み込んだ際に図8のように表示される。

円の中心の座標と半径の長さの数値を入力して、円の方程式がどのように変化するか、円のグラフがどのようになるか、考えて見よう。

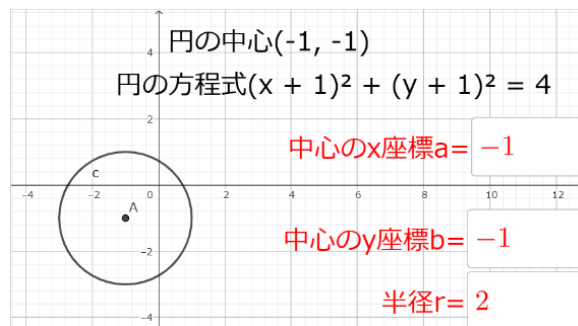


図 4-3 練習 1

例題1のQRコードでは、問題である軌跡がどのような図形を描くのか、視覚的にみることができる。さらに描かれた軌跡が条件を満たしているのか、GeoGebraを使用して逆についての確認ができる。これは問題文だけでは想像するのが難しい、軌跡が描く図形を理解するための手助けになる。実際にQRコードを読み込んだ際に図9のように表示される。

点との距離の比と軌跡

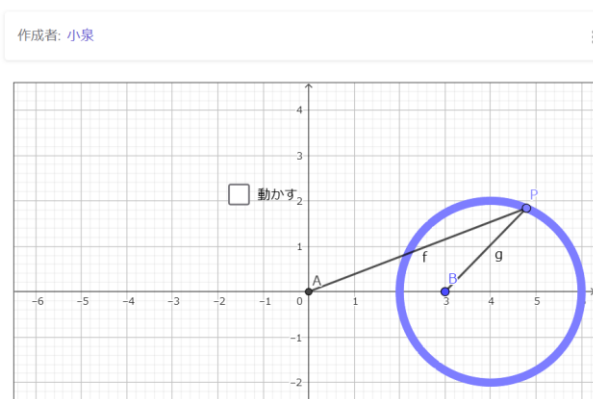


図 4-4 例題 1

ICT3のQRコードでは、2次関数 $y = ax^2$ の値 a を変化させることで、グラフがどのように変化するかを視覚的に見ることができる。これを行うことによって、 x^2 の係数と2次関数のグラフの概形の関係を生徒自身で気づくための手助けになる。実際にQRコードを読み込んだ際に図10のように表示される。

$y = ax^2$ のグラフ ワークシート

作成者: 小泉

$y = ax^2$ のグラフから、 a の値を変化させると二次関数のグラフはどのような形に変化するのか考えてみよう。

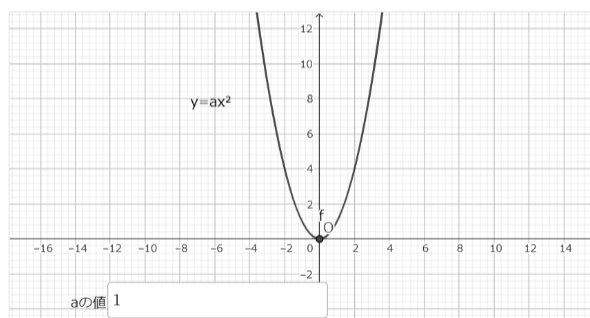


図 4-5 ICT3

ICT4のQRコードでは、問題が記載されており GeoGebra を利用して簡単に問題を解くことができる。GeoGebra によって解が求められたら、「答え」のボタンを押すことで解答を確認することができる。これを利用することで点の平行移動がどのように動くのかを、様々な値を代入して試すことで理解する手助けになる。実際に QR コードを読みたった際に図 11 のように表示される。

点B(5,0)は点A(1,5)をx軸方向にp、y軸方向にqだけ移動した点の座標である。点Cを動かしてp、qを求めよ。ここで点Cの座標は(1+p,5+q)である

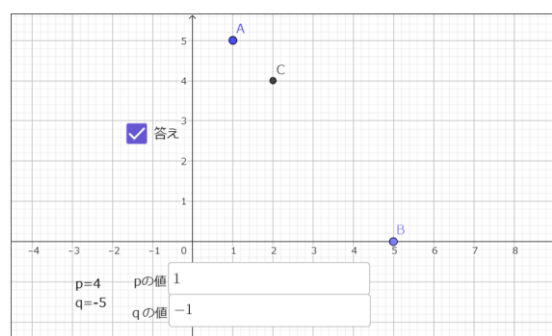


図 4-6 ICT4

ICT5のQRコードでは、2次関数のグラフを動かしてみて、動きによって2次関数の式がどのように変化するか、GeoGebra を使って考えることができる。頂点が記されていることにより、2次関数のグラフと式との関係がわかりやすくなっている。実際に QR コードを読みたった際に図 12 のように表示される。

二次関数の平行移動

作成者: 小泉

二次関数のグラフを平行移動した時、二次関数のグラフと式にはどのような関係があるのか実際に動かしてみて考えてみよう！

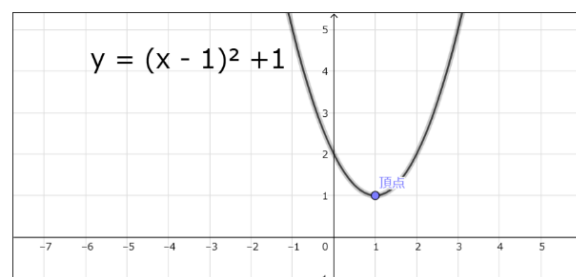


図 4-7 ICT5

ICT6のQRコードでは、それぞれの2次関数の座標とqの値にはどのような関係があるか。またグラフの平行移動とqの値にはどのような関係があるのか。この2つのことについて、「ヒント」や「動く」のボタンを押したり、qの値を代入したりして考えることができる。また「答え」のボタンを押すと問いの解答を見ることができる。これは、GeoGebra を使うことで生徒自身で考え、答えを自分で確認できるので主体的な学習につながる。実際に QR コードを読みたった際に図 13 のように表示される。

平行移動・縦 q の値を入力してみよう

作成者: 小泉

実際に具体的な値をqに代入した時、それぞれの2次関数の座標とqの値にはどのような関係があるのか、緑矢印を参考に考えてみよう。また、2つの関数のグラフの平行移動はqの値とどのように関係しているか考えてみよう。

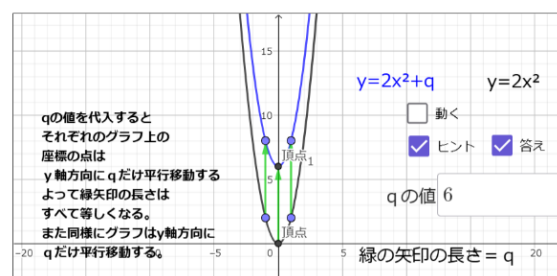


図 4-8 ICT6

ICT7のQRコードでは、2次関数が平行移動したとき軸と頂点とx軸との交点はどのようにになっているか、GeoGebraを利用して考えることができる。「動く」ボタンを押せば、視覚的に平行移動を見ることができる。その際に軸と頂点とx軸との交点の変化も見ることができる。実際にQRコードを読み込んだ際に図14のように表示される。

平行移動・縦 軸・頂点・x軸との交点

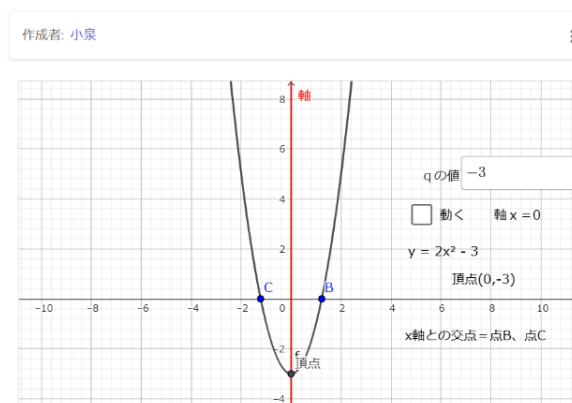


図 4-9 ICT7

ICT8のQRコードでは、それぞれの2次関数の座標とpの値にはどのような関係があるか。またグラフの平行移動とpの値にはどのような関係があるのか。この2つのことについて、「ヒント」や「動く」のボタンを押したり、pの値を代入したりして考えることができる。また「答え」のボタンを押すと問いの解答を見ることができる。実際にQRコードを読み込んだ際に図15のように表示される。

実際に具体的な値をpに代入したとき、それぞれの2次関数の座標の点とpの値にはどのような関係があるのか、緑矢印を参考に考えてみよう。また、2つの関数のグラフの平行移動はpの値とどのような関係になっているのか考えてみよう。

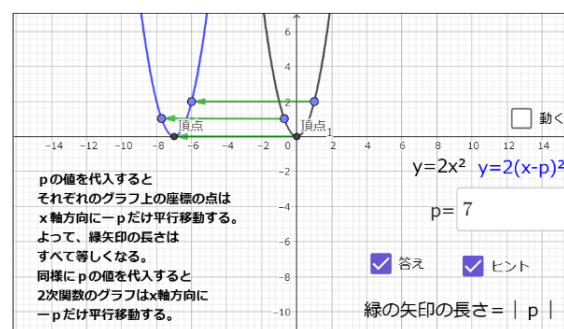


図 4-10 ICT8

ICT9のQRコードでは、2次関数が平行移動したとき軸と頂点とx軸との交点はどのようにになっているか、GeoGebraを利用して考えることができる。「動く」ボタンを押せば、視覚的に平行移動を見ることができる。その際に軸と頂点とx軸との交点の変化も見ることができる。実際にQRコードを読み込んだ際に図16のように表示される。

平行移動・横 軸・頂点・x軸との交点

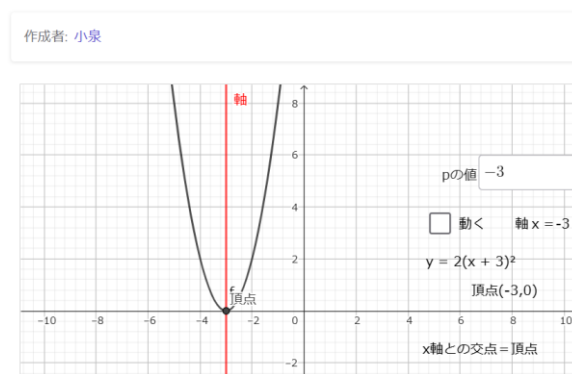


図 4-11 ICT9

ICT10 の QR コードでは、それぞれの 2 次関数の座標と p, q の値にはどのような関係があるか。またグラフの平行移動と p, q の値にはどのような関係があるのか。この 2 つのことについて、「ヒント」や「動く」のボタンを押したり、 p, q の値を代入したりして考えることができる。また「答え」のボタンを押すと問いの解答を見ることができる。今回は斜めの方向に平行移動するが、その方向は p, q の値によって決められていることが図に記されている。実際に QR コードを読み込んだ際に図 17 のように表示される。

ICT11 の QR コードでは、2 次関数が平行移動したとき軸と頂点と x 軸との交点はどのようにになっているか、GeoGebra を利用して考えることができる。「動く」ボタンを押せば、視覚的に平行移動を見ることができる。その際に軸と頂点と x 軸との交点の変化も見ることができる。実際に QR コードを読み込んだ際に図 18 のように表示される。

例題 3 の QR コードでは、例題の解答になるグラフを描いている。そのとき、頂点、軸、2 次関数などの値もグラフ上に記している。またグラフを描く時の注意点や書く必要のある点などを GeoGebra でわかりやすく記している。教科書には書ききれない内容を QR コード内に記載することで、1 ページによりたくさんの情報を入れることができた。実際に QR コードを読み込んだ際に図 19 のように表示される。

実際に具体的な値を p, q に代入した時、それぞれの 2 次関数の座標と p, q の値にはどのような関係があるのか、緑矢印を参考に考えてみよう。また、2 つの関数のグラフの平行移動は p, q の値とどのように関係しているか考えてみよう。

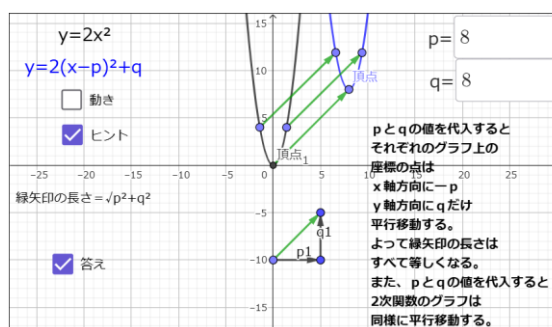


図 4-12 ICT10

平行移動・斜め 軸・頂点・ x 軸との交点

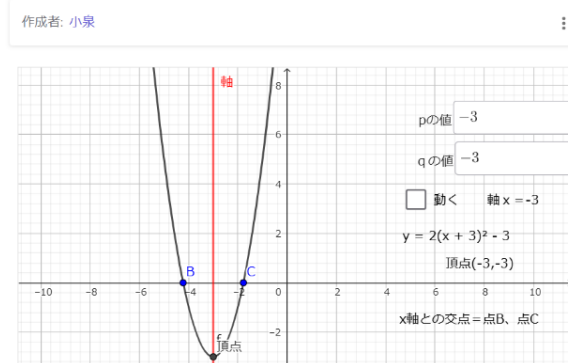


図 4-13 ICT11

2 次関数を表示するとき、必ず頂点とその他の点を 1 点取る必要がある。その点は x 軸または y 軸との交点を取ると良い。

赤で書いてあるものは必ず書くこと
軸の名前、原点など

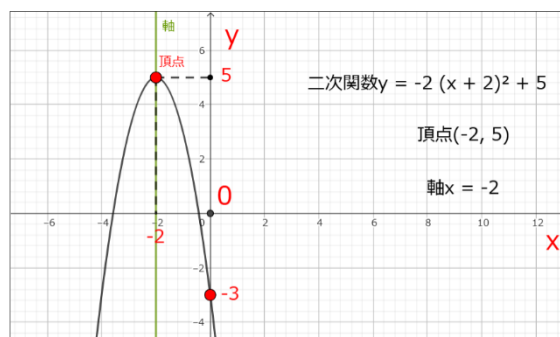


図 4-14 例題 3

ICT12 の QR コードでは、2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ の a, b, c の値をそれぞれ変化させると、グラフがどのように変化することができる。それは次のような変化が起きる。 a の値を変化させると、グラフの概形が変わる。 b の値を変化させると、頂点が放物線を描くように動く。 c の値を変化させると、グラフは縦に平行移動する。実際に QR コードを読み込んだ際に図 20 のように表示される。

2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ は、 a, b, c の値を変化させるとグラフの概形はどのように変化するか考えてみよう。

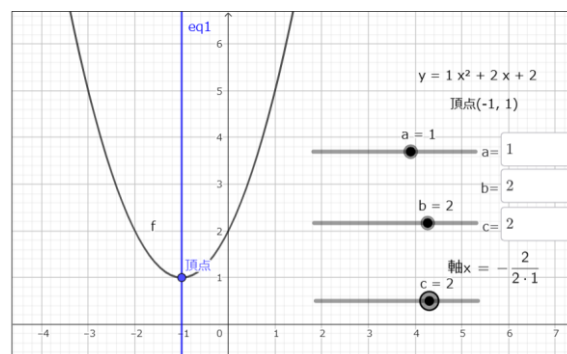


図 4-15 ICT12

ICT13 の QR コードでは、放物線 f を平行移動したときの放物線 g について、軌跡を利用して考えるというもの。実際に放物線 f 上の点を平行移動させて、その平行移動した点の座標を (x, y) として軌跡を考える。その際にどのような図を描くのかを GeoGebra を使って見る事ができる。

放物線 $f: y = 2x^2$ を x 軸方向に 3、 y 軸方向に 4 だけ平行移動して得られる放物線 g を考える。軌跡を利用するとき、放物線 g 上の点を $P(x, y)$ とする。

動くボタンを押して点 P の描く軌跡のグラフを見てみよう。

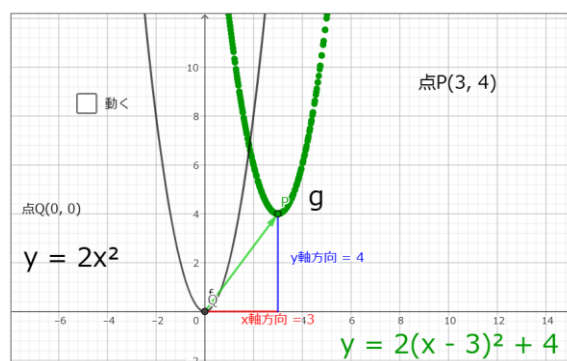


図 4-16 ICT13

これは、視覚的に放物線 f 上の点すべてが放物線 g 上の点に平行移動していることを理解するために役立つ。つまりそれが放物線 f から放物線 g の平行移動であることも理解できる。実際に QR コードを読み込んだ際に図 21 のように表示される。

グラフ g は 2 次関数 $y = 2x^2$ を x 軸方向 p 、 y 軸方向 q だけ平行移動した放物線である。

点 P の座標となる p 、 q の値を自由に変えて様々な点の平行移動を見てみよう。また動くボタンを押して点 P の描く軌跡のグラフ g を見てみよう。(点 P が動くと残像を残す)

ICT14 の QR コードでは、ICT13 で行ったことを一般化したもの。平行移動の数値を自由に変えることができる。その値を変化させると矢印の長さも変化する。そして平行移動した点 P が表示され、「動く」ボタンを押せば軌跡が描かれる。また p, q の値の変化によって平行移動した放物線の式も変化する。これを利用すれば様々な放物線の平行移動を考えることができる。

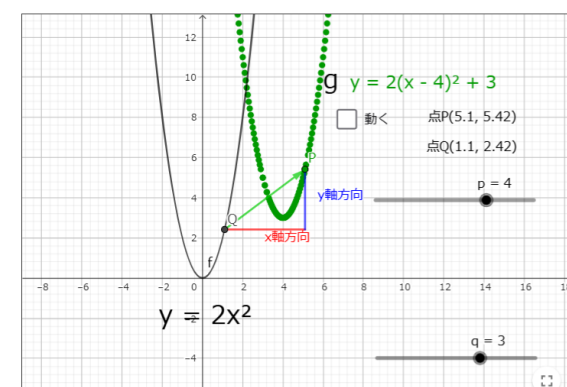


図 4-17 ICT14

第5章 GeoGebra を用いた授業実践とアンケート調査

本章では、完成した教科書に導入した GeoGebra の同様の教材を使った授業実践について述べていく。またその成果やアンケート調査の結果についても記載する。

第1節 授業実践の概要

本研究では、高校2年生理系のクラス20名を対象として50分1コマの教育実践を行う。教育実践では、GeoGebra を使用した授業を行い、GeoGebra を使ったことで内容が理解しやすくなったと生徒に感じさせることを目的とする。また GeoGebra を利用させることで生徒が自ら GeoGebra を開き閲覧し、そのヒントをもとに問題を解いていくのでより主体的な学びになると考えている。最初は GeoGebra を利用せず、生徒に問題文からだけでは考えるのが困難である内容を考えさせ、その後 GeoGebra を見せることでより GeoGebra の効果を感じやすくさせている。また最後の問いでは、実際生徒に軌跡が描く図形の方程式を考えさせる。その際に GeoGebra を使用させることで、分からないとき教員を頼るのではなく GeoGebra にあるヒントを自分のタイミングで見ることができ、より主体的な学習になると想定している。

第2節 授業実践の構成

まずは、生徒に教科書を片づけてもらい、問いにある点Pの軌跡はどのような図形になるかを問題文だけで生徒に予想させる。予想した理由も記載させる。その後、QRコードから GeoGebra を開くと図の中に「軌跡を描く」と書かれたボタンが表示される。ボタンを押すと点Pが動き出しその残像が表示され、軌跡がどのような図形を描くのか、視覚的に生徒に確認させる。このようにすることで、問題文だけでは分からなかったことが GeoGebra を使うことでわかりやすくなったと生徒に感じてもらう。次は、授業の板書を写したり、穴埋めを生徒にさせたりする。最後の問いでは、生徒に点Pが描く図形の方程式を求めさせる。その際 GeoGebra を見せてまず条件からできる方程式と文字で置く点を表示させます。その二つの情報をヒントに図形の方程式を生徒に求めさせる。分からない生徒がいる場合は GeoGebra にあるヒント1・2・3を順番に一つずつ見させて問題を解かせる。その際に閲覧したヒントの番号をワークシートに記載できるようにした。そのようにすることで自分がどのヒントを見て解くことができたかを知ることができる。最後に問いの答えは生徒が利用している教科書に記載されているので、各自自分の解答があっているのかを確認させる。よって、教員に頼らずに最後まで主体的な学習ができる。それでも分からない生徒に対しては個別に対応が必要である。

第3節 授業実践の結果と分析

授業実践ではワークシートやパワーポイント・GeoGebra を用いて授業実践を行った。ま

ず授業の様子について述べる。問1の問いを生徒に考えさせているときは、悩んでいる生徒がほとんどですぐに「円である」と答えられている生徒は少なかった。答えられている生徒に口頭で理由を聞いても、感と答える生徒がいた。生徒の解答例はいくつか以下の図に記す。

問1、点Pの軌跡はどのような図形になるか予想してみよう。(その理由も記載せよ。)

原点が中心の円 AとBの中点が原点だから

図 5-1 生徒の解答例 1

問1、点Pの軌跡はどのような図形になるか予想してみよう。(その理由も記載せよ。)

x軸上の直線 理由 AとBの座標が0だから。

→円

図 5-2 生徒の解答例 2

問1、点Pの軌跡はどのような図形になるか予想してみよう。(その理由も記載せよ。)

だえん

図 5-3 生徒の解答例 3

問1、点Pの軌跡はどのような図形になるか予想してみよう。(その理由も記載せよ。)

←これ ベン図の外周。

図 5-4 生徒の解答例 4

問1、点Pの軌跡はどのような図形になるか予想してみよう。(その理由も記載せよ。)

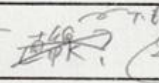
3次元空間?  直線?  2本の和が0

図 5-5 生徒の解答例 5

生徒の全員が問1に答え終わったら、GeoGebraを使って点Pの軌跡がどのような図形を描くか確認を行った。そのときの写真が以下の図になっている。



図 5-6 GeoGebra で点 P が描く図形を見せている場面

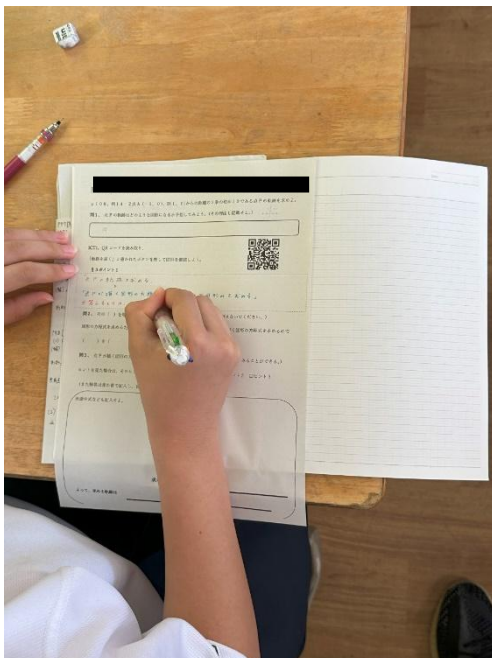


図 5-7 ワークシートを記入する生徒の手元

図 5-6 は、GeoGebra で点 P が描く図形を見せている時の写真である。プロジェクターを使って前で表示することにより生徒全員が注目していた。GeoGebra を見ることで点 P の軌跡が描く図形をほぼ全員の生徒が理解できていた。

図 5-7 は、ワークシートを記入しているときの生徒の手元を表示しています。黒線は生徒の個人情報に伏せるために引いた。ワークシートを記入させている間は次週のような形式を取って、教員は机間巡視を行っているが、比較的全員が集中してワークシートに取り組むことができていたと思う。

ポイントと問2は授業の解説の流れで使用した。次に問3に進むが、まずGeoGebraで条件の式と点Pの座標を表示した。それをヒントに問3を生徒に解かせた。もくもくと問題を解いている生徒は数人いた。しかし全く手が動いていない生徒が何人かいたため、GeoGebraでヒント1・2・3を見ることができることを伝えた。ヒントを見ることで手が動き始めた生徒も何人かいた。ヒントを見たら、ワークシートのチェック欄にチェックをするように指示をした。問3を解いている時の生徒の様子は、自習のような形式であったがほぼ全員が集中して問3を解くことができていた。最後に教科書に問3の答えがあるので生徒それぞれで答えを確認させた。授業後ワークシートを回収して、問3の正答率のヒントをどれだけ閲覧しているかを集計した。また、後日の次の授業で同じ生徒20人を対象にワークシートの問3と同様な問題の小テストを行った。



図 5-8 ワークシート問題の正答率と小テストの正答率の集計結果

問3の集計の結果、約半数がヒント1までで解くことができていた。また全体の8割の生徒が、点Pが描く図形の方程式を求めることができた。

小テストの集計の結果、9人の生徒が満点だった。減点とは、最後の答え方の言葉が不足している生徒を減点としてカウントしている。よって減点の生徒は、問題解けていると判断しても良い。よって全体の約8割が問題を解くことができていた。0点の生徒は、ワークシートを解けていなかった生徒とすべてのヒントを閲覧し解いた生徒が該当した。減点をした生徒の実際の解答を次のページに図として記載する。図5-9の解答をした生徒が4人いた。

今回の授業実践によって、栗島ら（2020）・芝辻（2022）も述べていた通り、ICT＝GeoGebraを利用したことにより主体的な学習ができ、生徒の学習に対する理解を促進させたことが分かった。小テストの結果からも普段の小テストより平均が高かったので、GeoGebraの効果があったと考えられた。

求める軌跡は $x^2 + y^2 = 16$

図 5-9 小テストの減点解答

求める軌跡は 半径 4 で中心 0,0

図 5-10 小テストの減点解答

第 4 節 授業実践後のアンケート調査の結果と分析

GeoGebra などの ICT を使用した授業実践で生徒にどのような影響があったのかを知るために 3 つの項目に分けてアンケート調査を、授業実践を行った理系の生徒 23 人に行った。授業実践の時は欠席者が 3 名いた。3 つの項目は「ICT 活用の効果」、「授業への意欲性」、「数学の理解」である。それぞれの項目ごとにアンケート調査の結果を棒グラフにより集計した。一つ目は「ICT 活用の効果」の集計結果を図 5-11 に記した。

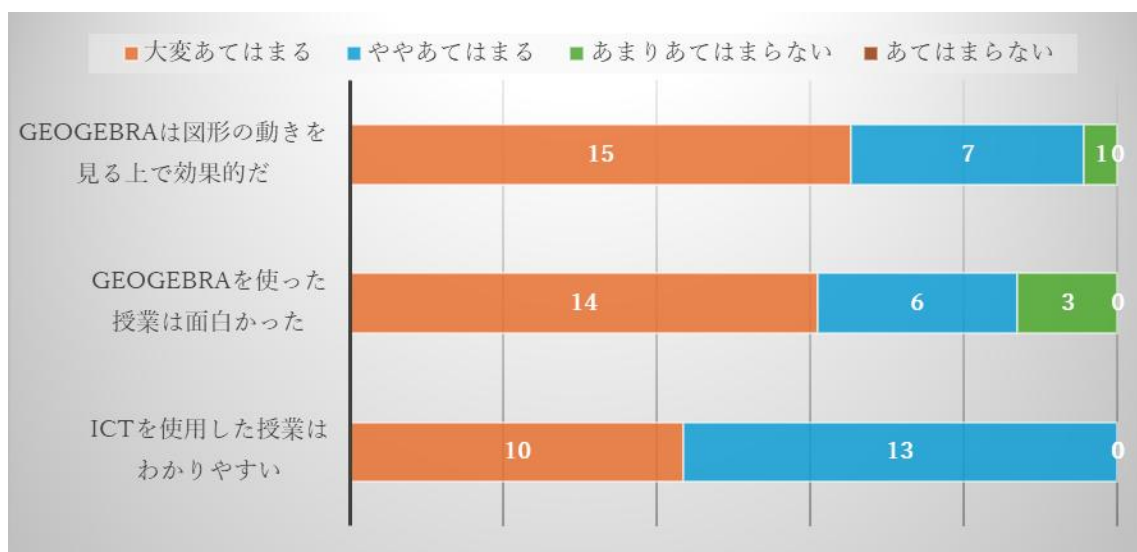


図 5-11 「ICT 活用の効果」についてのアンケート調査結果

図 5-11 より、GeoGebra を使うことは、図形の動きを見る上で効果的だと感じた生徒は全体の約 9 割いた。また GeoGebra を使った授業は面白かったと感じた生徒も、全体の約 9 割だった。また ICT を使用した授業は、黒板のみの授業よりわかりやすいと感じたと全員の生徒が解答していた。当てはまらないと解答した生徒はいなかった。以上の結果から ICT を授業で使用したことによって、生徒に良い影響を与えていることが分かった。

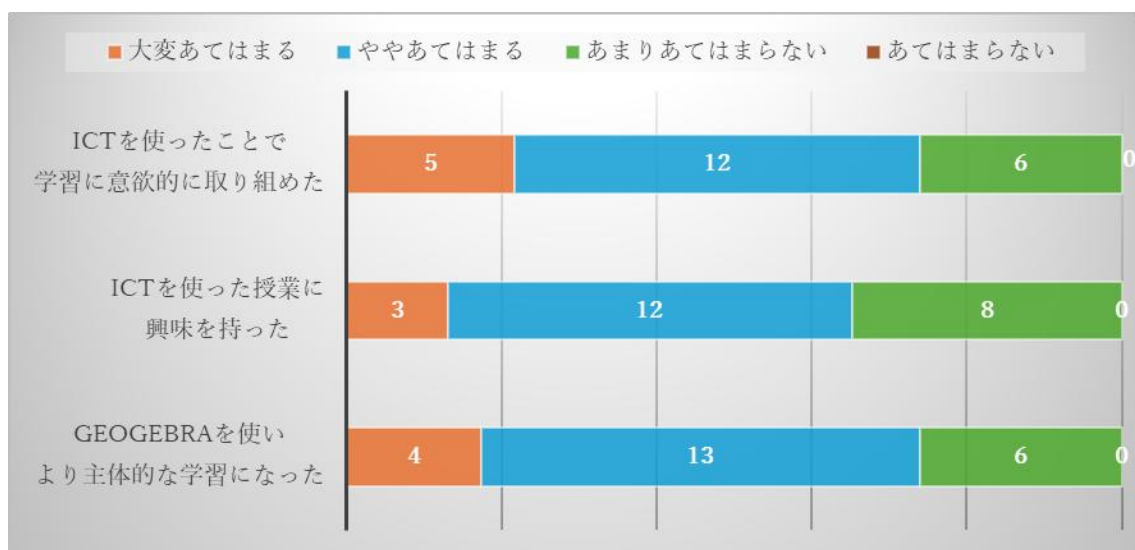


図 5-12 「授業への意欲性」についてのアンケート調査結果

二つ目は、「授業への意欲性」の集計結果を図 5-12 より項目ごとに見ていく。

GeoGebra を使用したことで、学習に意欲的に取り組めたと解答した生徒が全体の約 8 割いた。また、ICT を使った授業を受けてみて、ICT を使った授業に興味を持ったと解答した生徒が全体の約 7 割だった。また GeoGebra を利用し問題を解くことで、より主体的な学習になったと解答した生徒は全体の約 8 割いた。以上の結果から GeoGebra などの ICT を利用することで生徒の学習意欲が向上していることがわかった。

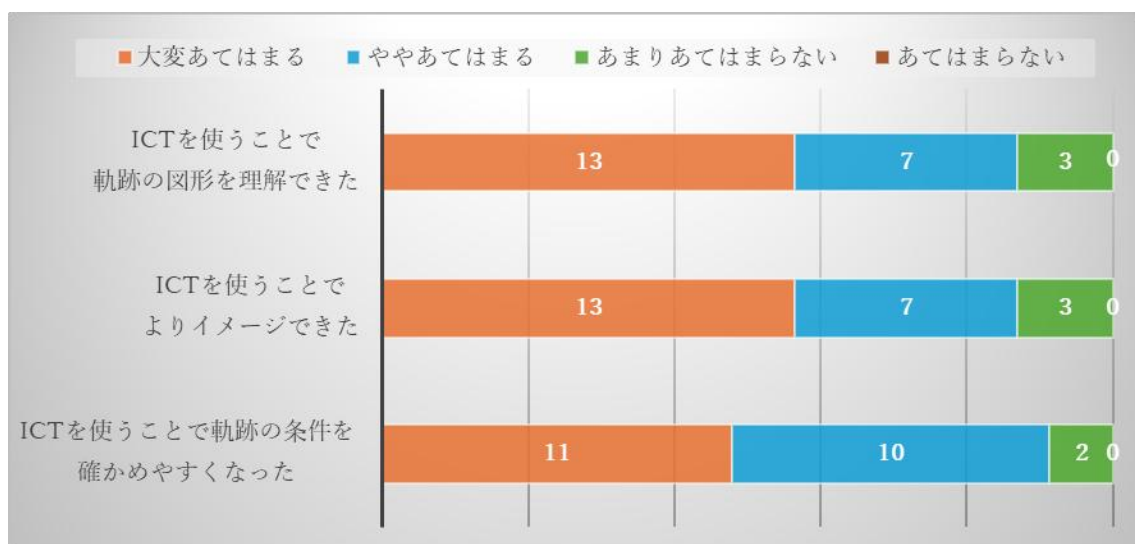


図 5-13 「数学の理解」についてのアンケート調査結果

三つ目は、「数学の理解」の集計結果を図 5-13 より項目ごとに見ていく。条件を満たす点の軌跡は、問題文だけではイメージしにくいのが、GeoGebra でその条件と軌跡を描いてみることで、どのような図形になるか理解できたと解答した生徒が、全体の約 9 割いた。また、「点が図形を描く」ということを、GeoGebra を使うことでよりイメージできたと解

答する生徒は、全体の約 9 割いた。また、GeoGebra を使うことで求める軌跡上の任意の点が条件を満たしているかどうか、確かめやすくなったと解答している生徒も全体の約 9 割いた。以上の結果から GeoGebra を使うことで数学の理解を促進させたことがわかった。

終わりに

本研究では、以下の 2 点を目的とした。

- (1) 平行移動と軌跡の指導の特徴について検討する
- (2) 高校生を対象に平行移動・軌跡の効果的な指導法を考案する

本研究の研究成果を研究目的に対応させて以下に述べる。

目的(1)の研究成果について、平行移動と軌跡それぞれの指導法の特徴を述べていく。平行移動の指導では軌跡の考え方が使用できないため、 x 軸の平行移動と y 軸の平行移動をそれぞれで考えて、平行移動前の式と平行移動後の式を比較し、 x, y の置き換えを導き出している。その後斜めの平行移動は x 軸の平行移動と y 軸の平行移動を合わせて考えることができる。以上のことより放物線のすべての平行移動は、 x, y を置き換えることで求めることができる。指導している。指導の特徴としては、高校一年生には軌跡の考えを取り入れた説明は理解するのが困難であるため、軌跡の考えを使わない指導法を行っている。軌跡の指導では、主に軌跡の求め方を教えている。まず求める軌跡上の点を (x, y) と置き、条件を満たす求める軌跡とは、条件から求めた x, y の式を変形してできた、 x, y の図形の方程式であると教えている。以上のことより、軌跡とは座標を文字で置いた点 (x, y) が無数にあり、その無数の点からできた図形の方程式のことであると指導している。指導法の特徴としては、 x, y の方程式の式変形で軌跡を求めていて、式のみで完結させていて図形としての視点からの解説は行っていない。

目的(2)の研究成果について、二つの分野を融合した教科書を作成し、そこに ICT 教材を導入した。導入した ICT 教材を使用した指導が、平行移動と軌跡の効果的な指導法であると考えた。平行移動や軌跡ではグラフや点の動きが関係してくる分野であるため、動きを想像する必要がある。そこで ICT を使用し、動きを視覚的に見ることができれば思考の手助けになると考えた。ICT 教材には GeoGebra を使用した。そこで作成した教材を実際に授業の中で生徒に使用し、その後小テストを行い理解度の調査と授業後のアンケート調査を行った。その結果小テストの結果は普段より正答率が高く、アンケート調査では ICT を利用したことにより、授業がわかりやすくなったと答えた生徒が 9 割を超えていた。以上のことより、GeoGebra を使った指導法が効果的であったと考えられる。

引用・参考文献

- [1]村上仙瑞：“軌跡の方程式の求め方の研究” 特集 教材研究 74号 2012年9月
- [2]久富洋一郎：“高等学校数学における理解を深めるための指導方法に関する研究（Ⅰ）－数学的理解の2軸過程モデルに基づく「図形と計量」の学習指導を通して－” 全国数学教育学会誌 数学教育学研究 第19巻 第2号 2013 pp.35~44
- [3]河田勇希・御園真史：“数学Ⅱ「図形と方程式」における構想・見通しを立てる活動の効果の検討－1人1台端末を活用して－” 日本科学教育学会研究会研究報告 Vol.38 No.2 (2023)
- [4]芝辻正：“一人一台のICT端末を活用した数学の授業実践とその考察” 2022年 46巻1
- [5]齊藤勝・河村明和：“初等教育におけるICTを活用した授業改善－協働学習を取り入れた体育科の実践から－” 学級経営心理学研究, 2017, 6, 174－182
- [6]松村悠・平塚旭・佐伯英人：“ICTを使った数学の授業－中学校の第2学年「D データの活用」において－” 日本科学教育学会研究会研究報告 Vol.35 No.7 (2021)
- [7]栗島昂大・鷺尾夕紀子・中村周平・鈴木潔光・藤田耕平・平田(河野)典子：“ICT教材を活用した数学導入教育の実践” 事例紹介 Case study 2020年 68巻3号 p.3_72-3_76
- [8]宮川健・初谷淳：“「平行移動，対称移動及び回転移動」において課題探究として証明することの授業化” 特集 証明することのカリキュラム開発 中学校第1学年における授業化の過程及びその成果と課題 2014年 96巻9号 p.6
- [9]堀田直希・水口鑑：“軌跡の問題解決過程における理解の困難性に関する研究－方程式のコンセプションに着目して－” 全国数学教育学会誌 数学教育学研究 2022年 28巻1号 p.61-71
- [10]長谷川文皓：“軌跡の指導について” 1966年 48巻11号 p.200-
- [11]詳説 数学Ⅱ 改訂版 高橋陽一郎編 株式会社新興出版社啓林館 61 啓林館 数Ⅱ 324 文部科学省検定済教科書 高等学校数学科用 平成29年2月14日 検定済 平成30年12月10日発行
- [12] 詳説 数学Ⅰ 改訂版 高橋陽一郎編 株式会社新興出版社啓林館 61 啓林館 数Ⅰ 324 文部科学省検定済教科書 高等学校数学科用 平成28年2月15日 検定済 平成30年12月10日発行
- [13]改訂版 数学Ⅰ 数研出版株式会社 文部科学省検定済教科書 高等学校数学科用 104 数研 数Ⅰ 327 平成28年2月15日 検定済 令和4年1月31日 発行
- [14]数学Ⅰ 俣野 博/河野俊丈 編 東京書籍株式会社 文部科学省検定済教科書 高等学校数学科用 2 東書 数Ⅰ301 平成23年3月9日検定済 令和3年2月10日発行
- [15]教科書ガイド 数研版 改訂版 数学Ⅰ 104 数研 数Ⅰ327 学習ブックス 数研図書 株式会社 2021年3月1日発行
- [16]数学Ⅰ 数研出版株式会社 文部科学省検定済教科書 高等学校数学科用 104 数研 数Ⅰ310 平成23年3月9日検定済 平成27年1月10日発行

[17] 数学Ⅱ 数研出版株式会社 文部科学省検定済教科書 高等学校数学科用 104 数研数Ⅱ309 平成 23 年 3 月 23 日検定済 平成 27 年 1 月 10 日発行

[18] 数学Ⅰ 数研出版株式会社 文部科学省検定済教科書 高等学校数学科用 104 数研数Ⅰ712 令和 3 年 2 月 12 日検定済 令和 5 年 1 月 31 日発行

[19] 数学Ⅱ 数研出版株式会社 文部科学省検定済教科書 高等学校数学科用 104 数研数Ⅱ709 令和 3 年 3 月 1 日検定済 令和 5 年 1 月 31 日発行

謝辞

本研究に取り組んできた中で、多くの方々にご協力いただきました。この場をお借りしまして、感謝申し上げます。

指導教員である黒田恭史先生は、大学院の短い 2 年間でしたが研究室で大変お世話になりました。新たに取り組まれている教育や、いろいろな京都の学校についての情報など、研究以外にも様々な興味深いことを教えていただき、とても良い勉強になりました。

また吉田耕平先生、和田浩介先生には、修了論文に記載した授業実践を行う際にお世話になりました。吉田耕平先生に関しては、専門実習の時の指導教員としても学校の教育現場とはどのようなものなのか、授業の中から普段の業務までたくさんのことを教えていただきました。

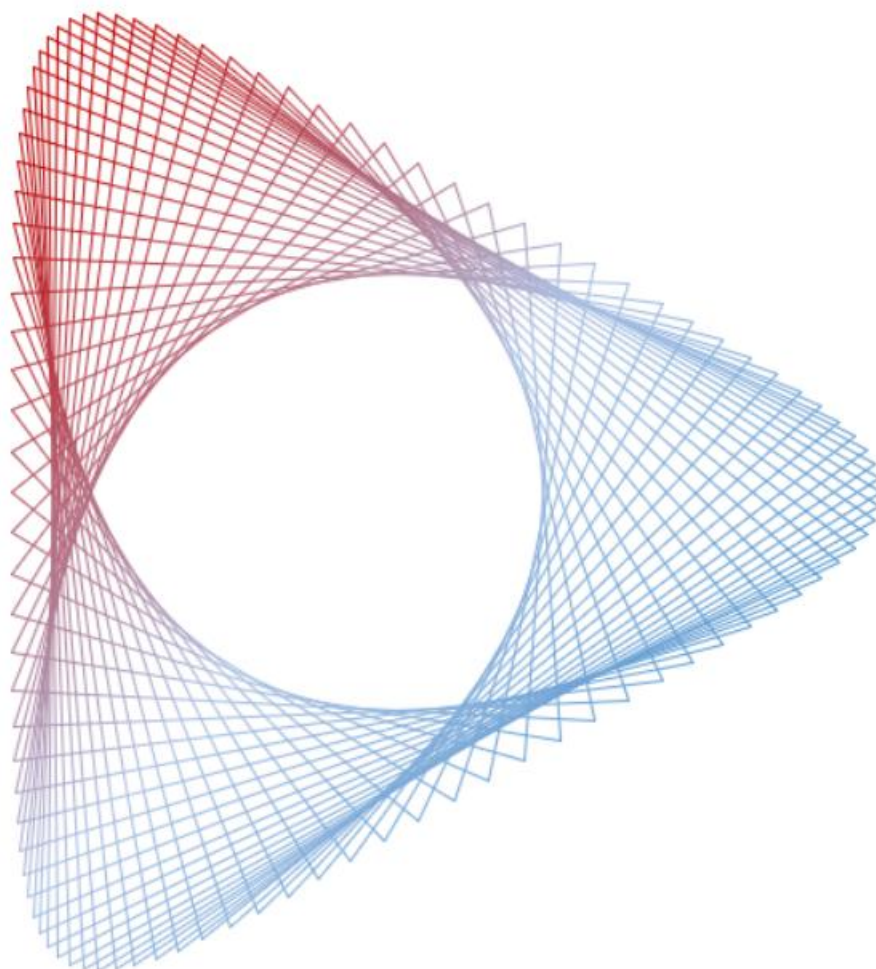
上記の皆様のご協力のもと、修了論文を作成することが出来ました。今後も感謝の意を忘れることなく、この経験を活かせるように、教育者として精進してまいります。

2025 年 1 月 10 日

小泉 太志

巻末資料

- ・作成した教科書・・・・・・・・・・・・・・・・・・25～38
- ・授業実践使用ワークシート・・・・・・・・・・・・39
- ・授業実践使用小テスト・・・・・・・・・・・・・・40
- ・アンケート用紙・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・41



二次関数の平行移動と軌跡

小泉太志

目次

第 1 章 2 次関数の平行移動と軌跡

第 1 節 2 次関数の平行移動と軌跡

[A] 放物線を描くグラフ	1
[B] 軌跡	1
[C] 円の方程式と軌跡	2
[D] $y = ax^2$ のグラフ	3
[E] 点の移動	4
[F] 2 次関数の平行移動	5
[G] $y = ax^2 + q$ のグラフ	5
[H] $y = a(x - p)^2$ のグラフ	6
[I] $y = a(x - p)^2 + q$ のグラフ	7
[J] 平方完成	8
[K] $y = ax^2 + bx + c$ のグラフ	8
[L] 平行移動と軌跡の関係	10
[M] 放物線の平行移動	11
Extra	12

第1節 2次関数の平行移動と軌跡

1 2次関数の平行移動と軌跡

x の2次式で表される関数を、 x の **2次関数** という。 x の2次関数 y は a, b, c を定数として、一般に次の形に書き表される。

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{ただし、} a \neq 0$$

例えば、次のような関数は、 x の2次関数である。

$$y = 2x^2 \quad y = -3x^2 + 2 \quad y = \frac{1}{2}x^2 - 5x - 6$$

A 放物線を描くグラフ

2次関数のグラフは一般的に **放物線のグラフ** と呼ばれています。

放物線とは右の図のようなボールを投げた時の軌道のことです。

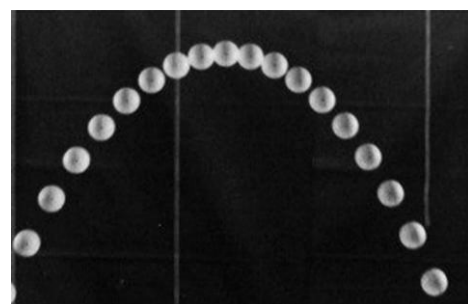
ではなぜ放物線のグラフというのでしょうか。結論を言うと、

a, b, c を実数の定数として、ものを投げた時のその軌道は

$y = ax^2 + bx + c$ で表されるからです。これについての証明は

$\sin \theta, \cos \theta$ など三角比の知識や物理的な知識が必要です。

証明はこの章の **Extra** に記載しています。



ICT1 GeoGebra でボールを投げる軌道を

右の QR コードを読み取って見てみよう。



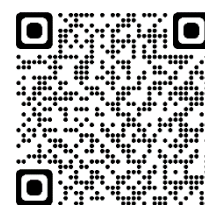
B 軌跡

上でみせたボールを投げる軌道は2次関数のグラフを描きました。これは物理的な条件を満たしながら物体が動いたことで放物線が描かれました。この現象を数学的に、ボールを点として言い換えてみます。

一般に、与えられた条件を満たす点が動いてできる図形を、その条件を満たす **軌跡** という。すなわち、軌跡はその条件を満たす点全体の集合である。

ICT2 GeoGebra で点 C が $AC=g$ を満たしながら動くとき、

点 C が描く図形は何か右の QR コードを読み取って見てみよう



C 円の方程式と軌跡

先ほど ICT2 で見てもらった円を方程式で表してみよう。

<円の方程式>

点(a,b)を中心とし、半径が r の円の方程式は

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

特に、原点 O を中心とし、半径が r の円の方程式は $x^2 + y^2 = r^2$



練習 1 中心が点(-2,3) 半径が $\sqrt{5}$ の円の方程式を求めよ。ヒント→

例題 1 2点 A(0,0)、(3,0)からの距離の比が2:1である点 P の軌跡を求めよ。

解 点 P の座標を(x,y)とする。P の満たす条件は

$$AP:BP=2:1$$

$$\text{これより } AP=2BP$$

$$\text{すなわち } AP^2=4BP^2$$

$AP^2=x^2+y^2$ 、 $BP^2=(x-3)^2+y^2$ を代入すると

$$x^2+y^2=4\{(x-3)^2+y^2\} \quad \text{整理すると } x^2+y^2-8x+12=0$$

$$\text{すなわち } (x-4)^2+y^2=2^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

ゆえに、条件を満たす点 P は、円①上にある。

逆に、円①上の任意の点 P(x,y)は、条件をみたす。

よって、求める軌跡は、中心が点(4,0)、半径が2の円である。



QRコードには軌跡のグラフが描かれている

[補足] m、n は正の数とする。一般に、 $m \neq n$ ならば、2点 A,B からの距離の比がm:nである点の軌跡は、線分 AB をm:nに内分する点と外分する点を直径の両端とする円である。この円を **アポロニウスの円** という。

<軌跡を求める手順>

- ① 求める軌跡上の任意の点を点 P(x,y)などで表し、与えられた条件を座標の間の関係式で表す。
- ② 関係式から x、y を使った軌跡の方程式を導き、その方程式の表す図形を求める。
- ③ その図形上の任意の点が条件を満たしていることを確かめる。

練習 2 2点 A(-1,0)、(2,0)からの距離の比が1:2である点 P の軌跡を求めよ。

D $y = ax^2$ のグラフ

一般に、2次関数 $y = ax^2$ のグラフは原点 O を通り、 y 軸に関して対称な曲線である。その曲線を放物線といい、放物線は対称の軸をもっている。この対称の軸を、その放物線の **軸** といい、軸と放物線の交点を、その放物線の **頂点** という。

ICT3 右の QR コードを読み取って $y = ax^2$ のグラフのワークシートを考えて見てみよう。

また、2次関数 $y = ax^2$ について、次のことが成り立つ。

- ① $a > 0$ のとき x の値が増加すると $x \leq 0$ の範囲で y の値は減少し、 $x \geq 0$ の範囲で y の値は増加する。このとき2次関数 $y = ax^2$ のグラフは、その曲線の形状から **下に凸** であるという。右の QR コードを読み取って動きを見てみよう。
- ② $a < 0$ のとき x の値が増加すると $x \leq 0$ の範囲で y の値は増加し、 $x \geq 0$ の範囲で y の値は減少する。このとき2次関数 $y = ax^2$ のグラフは、その曲線の形状から **上に凸** であるという。右の QR コードを読み取って動きを見てみよう。

<2次関数 $y = ax^2$ のグラフ>

2次関数 $y = ax^2$ のグラフは、放物線である。

1 軸は **y 軸** 頂点は **原点**

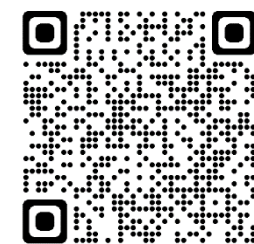
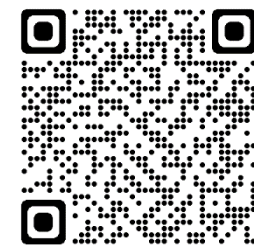
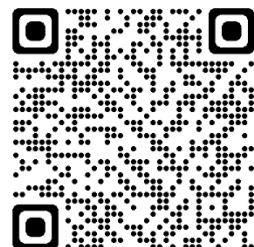
2 $a > 0$ のとき **下に凸**、 $a < 0$ のとき **上に凸**

<2次関数 $y = ax^2$ のグラフのかき方、手順>

- ① x 軸、 y 軸をかき、原点 O をかく。かいた物の名前は必ず記載する。
- ② 次にかきたい放物線を通る点を3点とる
- ③ その3点は、頂点、 x 座標が0の点、 y 座標が0の点、である。
- ④ この3点を結んで放物線を描く。
- ⑤ 最後に放物線の名前と3点の座標の数値を記載する。

練習3 次の2次関数のグラフをかけ。またその放物線は上に凸、下に凸のどちらかであるかを答えよ。

(1) $y = 3x^2$ (2) $y = -4x^2$ (3) $y = \frac{1}{3}x^2$



E 点の移動

平面上で、図形上の各点を一定の向きに、一定の距離だけ動かすことを **平行移動** という。これから2次関数 $y = ax^2$ のグラフを平行移動した曲線について調べるが、そのために、まず、座標平面上の点の移動について考えよう。

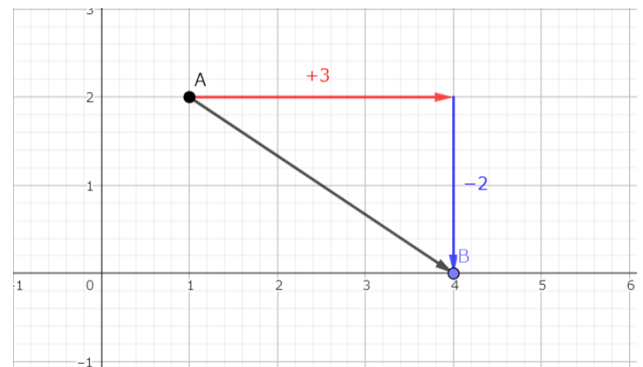
例題 2

点(1,2)をx軸方向に+3、y軸方向に-2だけ

移動した点の座標は

(1+3, 2-2)

すなわち、(4,0)である。



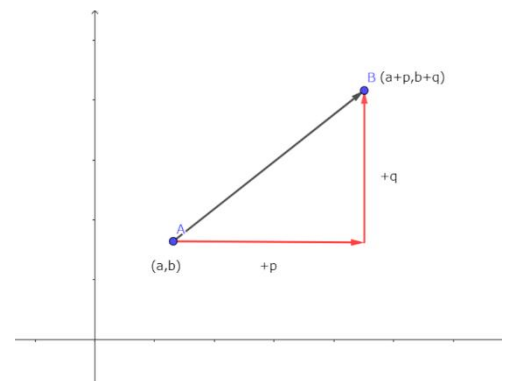
点の移動について、一般に、次のことがいえる。

点(a,b)をx軸方向にp、y軸方向にqだけ

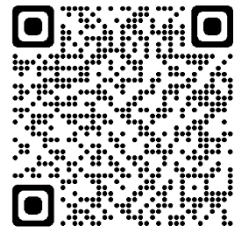
移動した点の座標は

(a+p, b+q)

である。



ICT4 次のQRコードを読み取ってワークシートの問題を解いてみよう。



練習 4 次の点を、x軸方向に-3、y軸方向に2だけ移動した点の座標を求めよ。

(1) (1,2) (2) (4,-1) (3) (3,-5) (4) (-1,-2)

F 2次関数の平行移動

前のページではある点を平行移動することを学習したが、同様に2次関数を平行移動したとき式はどのように変化するのか考えよう。

ICT 5 右のQRコードを読み取り

$y = x^2$ の平行移動をGeoGebraを使って考えてみよう。



G $y = ax^2 + q$ のグラフ

今度は2次関数の式をパターンにわけて考えてみよう。

次の2つの2次関数のグラフの関係を、GeoGebraを使って調べてみよう。

$$y = 2x^2 \cdots \textcircled{1}$$

$$y = 2x^2 + q \cdots \textcircled{2}$$

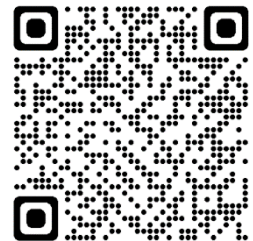
ICT 6 右のQRコードを読み取り、

2次関数①と②のグラフの関係はどのようになっているのか考えてみよう。



ICT 7 右のQRコードを読み取り、

ICT6のように平行移動したとき、2次関数の軸と頂点はどのようになっているのか見てみよう。



一般に、次のことがいえる。

2次関数 $y = ax^2 + q$ のグラフは、 $y = ax^2$ のグラフを
 y 軸方向に q だけ平行移動した放物線である。
 また、その軸は y 軸、頂点は点 $(0, q)$ である。

練習 5 次の2次関数のグラフをかけ。またその軸と頂点を求めよ。

$$(1) y = x^2 + 2 \quad (2) y = 2x^2 - 1 \quad (3) y = -\frac{1}{2}x^2 + 3 \quad (4) y = -x^2 - 2$$

H $y = a(x - p)^2$ のグラフ

同様に次の2つの2次関数のグラフの関係を、GeoGebraを使って調べてみよう。

$$y = 2x^2 \cdots \textcircled{1} \qquad y = 2(x - p)^2 \cdots \textcircled{2}$$

ICT 8 右のQRコードを読み取り、

2次関数①と②のグラフの関係はどのようなになっているのか考えてみよう。



ICT 9 右のQRコードを読み取り、

ICT8のように平行移動したとき、2次関数の軸と頂点はどのようなになっているのか見てみよう。



一般に次のようなことができる

2次関数 $y = a(x - p)^2$ のグラフは、 $y = ax^2$ のグラフを
 x 軸方向に p だけ平行移動した放物線である。
 また、その軸は直線 $x = p$ 、頂点は点 $(p, 0)$ である。

練習 6 次の2次関数のグラフをかけ。またその軸と頂点を求めよ。

$$(1) y = (x - 2)^2 \quad (2) y = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 \quad (3) y = 2(x + 3)^2 \quad (4) y = -(x - 1)^2$$

I $y = a(x - p)^2 + q$ のグラフ

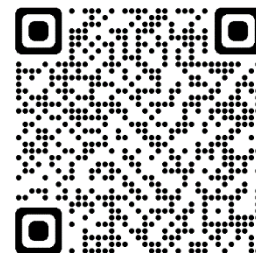
同様に次の2つの2次関数のグラフの関係を、GeoGebraを使って調べてみよう。

$$y = 2x^2 \cdots \textcircled{1}$$

$$y = 2(x - p)^2 + q \cdots \textcircled{2}$$

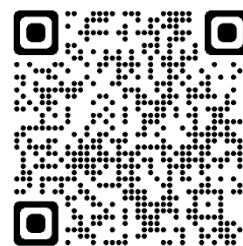
ICT 10 右のQRコードを読み取り、

2次関数①と②のグラフの関係はどのようなになっているのか考えてみよう。



ICT 11 右のQRコードを読み取り、

ICT10のように平行移動したとき、2次関数の軸と頂点はどのようなになっているのか見てみよう。



一般に次のようなことができる

2次関数 $y = a(x - p)^2 + q$ のグラフは、 $y = ax^2$ のグラフを x 軸方向に p 、 y 軸方向に q だけ平行移動した放物線である。
また、その軸は直線 $x = p$ 、頂点は点 (p, q) である。

練習 7 次の2次関数のグラフをかけ。またその軸と頂点を求めよ。

$$(1) y = (x - 1)^2 + 2$$

$$(2) y = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 1$$

$$(3) y = -(x + 2)^2 + 1$$

$$(4) y = (x + 1)^2 + 3$$

J 平方完成

2次式 $y = 2x^2 - 4x + 5$ は、次のように $a(x-p)^2 + q$ の形に変形できる。

$$\begin{aligned} & 2x^2 - 4x + 5 \\ &= 2(x^2 - 2x) + 5 \\ &= 2(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) + 5 \\ &= 2\{(x-1)^2 - 1^2\} + 5 \\ &= 2(x-1)^2 + 3 \end{aligned}$$

このように、2次式 $ax^2 + bx + c$ を $a(x-p)^2 + q$ の形に変形することを
平方完成するという

練習 8 次の2次式を平方完成せよ。

(1) $x^2 - 4x + 5$ (2) $2x^2 + 8x + 7$ (3) $-x^2 + x + 2$ (4) $-3x^2 - 6x - 5$

K $y = ax^2 + bx + c$ のグラフ

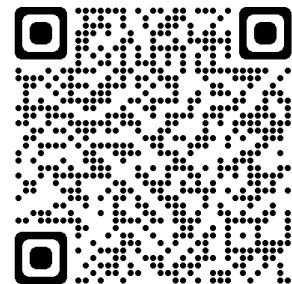
2次式の平方完成を利用して、2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフをかいてみよう。

例題 3 2次関数 $y = -2x^2 - 8x - 3$ のグラフをかけ。また、その軸と頂点を求めよ。

(解) まず平方完成をする (※緑で書かれた文字は回答に記載しない物である)

$$\begin{aligned} & -2x^2 - 8x - 3 \\ &= -2(x^2 + 4x) - 3 \\ &= -2\{(x+2)^2 - 2^2\} - 3 \\ &= -2(x+2)^2 + 5 \end{aligned}$$

よって $y = -2(x+2)^2 + 5$ この式から軸と頂点が見える。
右のQRコードを読み取ると、この関数のグラフが見られる。
また、グラフの描き方が記載してある。



平方完成した式より、軸は直線 $x = -2$ 、頂点は点 $(-2, 5)$ である。

練習 9 次の2次関数のグラフをかけ。また、その軸と頂点を求めよ。

(1) $y = x^2 - 6x + 4$ (2) $y = 2x^2 + 4x + 3$ (3) $y = -2x^2 + 8x - 4$
(4) $y = -3x^2 - 6x - 5$ (5) $y = 2x^2 - 2x + 2$ (6) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x$

9 第1章 2次関数の平行移動と軌跡

2次式 $ax^2 + bx + c$ を平方完成すると次のようになる。

$$\begin{aligned} & ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left\{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} + c \\ &= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\frac{b^2}{4a^2} + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

よって、2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフについて、次のことがいえる。

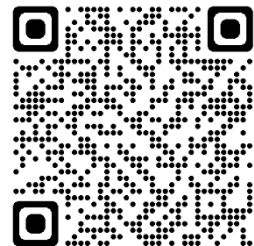
2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフ

2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは、 $y = ax^2$ のグラフを平行移動した放物線である。

軸は 直線 $x = -\frac{b}{2a}$ 頂点は 点 $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

ICT 12 右の QR コードを読み取り、

2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ において、 a, b, c の値が変化すると
グラフの概形がどのように変化するか見てみよう。



2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフを単に、**放物線 $y = ax^2 + bx + c$** といい、
 $y = ax^2 + bx + c$ をこの **放物線の方程式** という。

L 平行移動と軌跡の関係

次の平行移動の問題を解いてみよう。また軌跡の解法でも解いてみよう。

例題 3

放物線 $y = 2x^2$ を f とする。 f を x 軸方向に 3、 y 軸方向に 4 だけ平行移動して得られる放物線を g とする。 g を求めよ。

(平行移動の解法)

放物線 f の方程式 $y = 2x^2$ の x を $x - 3$ 、 y を $y - 4$ で置き換えると

$$y - 4 = 2(x - 3)^2$$

整理すると

$$y = 2x^2 - 12x + 22$$

よってこれが求める放物線 g である。

(軌跡の解法)

点 P の軌跡が放物線 g になるように点 $P(x, y)$ をとり、問いの平行移動によって点 P に移動する前の f 上の点を点 $Q(X, Y)$ とする。点 P は点 Q を x 軸方向に 3、 y 軸方向に 4 だけ平行移動した点であることより

$$x = X + 3$$

$$y = Y + 4$$

これが点 P の条件になります。これにより点 Q の座標は x, y を使って表すと

$$(x - 3, y - 4)$$

となり、点 Q は放物線 f 上の点なので、代入でき

$$y - 4 = 2(x - 3)^2$$

整理すると

$$y = 2x^2 - 12x + 22$$

故に、

この条件を満たす点 P の軌跡は放物線 f を平行移動した放物線 g となります。

逆に放物線 g 上の任意の点 $P(x, y)$ は、条件を満たす。

ICT 13 右の QR コードを読み取り、

点 P の軌跡はどのような図形を描くのか見てみよう。



M 放物線の平行移動

ここでは前回の軌跡の考え方を取り入れて、放物線の平行移動について詳しく見ていく。

放物線 $y = 2x^2$ を f とする。 f を x 軸方向に 3、 y 軸方向に 4 だけ平行移動することを、グラフ上の点の移動で考えて見よう。移動後の放物線を g とする。

移動する前の f 上の点を点 $Q(s, t)$ とし、この平行移動によって、点 Q が g 上の点 $P(x, y)$ へ動くとする

$$t = s^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$x = s + 3, y = t + 4 \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。 $\textcircled{2}$ から

$$s = x - 3, t = y - 4$$

これらを $\textcircled{1}$ に代入すると

$$y - 4 = 2(x - 3)^2$$

すなわち

$$y = 2(x - 3)^2 + 4$$

この 2 次関数のグラフが、放物線 g である。

一般に、関数 $y = f(x)$ のグラフを、 x 軸方向に p 、 y 軸方向に q だけ平行移動すると、 x を $x - p$ 、 y を $y - q$ で置き換えた次のような関数のグラフになる。

$$y - q = f(x - p)$$

ICT 14 右の QR コードを読み取り、

一般化した平行移動を GeoGebra で見てみよう。



練習 10 それぞれの 2 次関数のグラフを、() の中にあるように平行移動するとき、

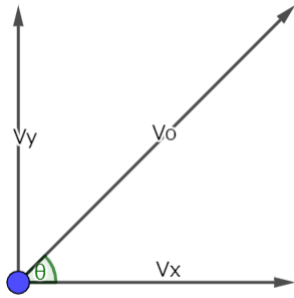
移動後の放物線の方程式を求めよ。

- (1) $y = 2x^2 + 3x + 1$ (x 軸方向に 1、 y 軸方向に 3)
- (2) $y = -x^2 - 5x + 2$ (x 軸方向に -2、 y 軸方向に -5)
- (3) $y = 5x^2 - x$ (x 軸方向に -3、 y 軸方向に 1)
- (4) $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 6$ (x 軸方向に 4、 y 軸方向に -2)

Extra

ここからはp1の[A]で解説していないボールの軌道について証明を行っていきます。

これについての証明は $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ など三角比の知識や物理的な知識が必要です。



初速度 V_0
 投げる角度 θ
 ボールの質量 m
 重力加速度 g
 $V_0 \neq 0$ 、 $\theta \neq 90$

- ・ 原点から初速度 V_0 、角度 θ で投げる。
- ・ t 秒後におけるボールの位置 (x, y) を求める。
 x 軸方向と y 軸方向の速度をそれぞれ V_x, V_y とする
- ・ x 軸方向には等速運動をするから

$$V_x = V_0 \cos \theta$$

$$x = V_0 \cos \theta \times t \quad \dots \textcircled{1}$$

- ・ y 軸方向には重力が加わり等加速度運動をする。

よって

$$V_y = V_0 \sin \theta - gt$$

$$y = V_0 \sin \theta \times t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

- ・ ①,②の式から t を消去すると

- ・ ①を変形した $t = \frac{x}{V_0 \cos \theta}$ を②に代入して

$$\begin{aligned} y &= V_0 \sin \theta \times \frac{x}{V_0 \cos \theta} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{V_0 \cos \theta}\right)^2 \\ &= \frac{V_0 \sin \theta}{V_0 \cos \theta} \times x - \frac{1}{2}g \frac{x^2}{V_0^2 \cos^2 \theta} \\ &= -\frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \theta} x^2 + \tan \theta \times x \end{aligned}$$

ここで $a = -\frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \theta}$, $b = \tan \theta, c=0$, と置くと、これらはもとに実数より放物線の方程式 $y = ax^2 + bx + c$ と一致する。

p 108、例14 2点 $A(-1, 0)$ 、 $B(1, 0)$ からの距離の2乗の和が10である点 P の軌跡を求めよ。

問1、点 P の軌跡はどのような図形になるか予想してみよう。(その理由も記載せよ。)

ICT1、QRコードを読み取り、

「軌跡を描く」と書かれたボタンを押して図形を確認しよう。



§3ポイント1

問2、次の () を埋めなさい。(答えは赤か青で記入し、自分の解答は消さないでください。)

図形の方程式を求めるためには文字 (,) が必要であり、また点 P が描く図形の方程式を求めるので

() を () とおく。

問3、点 P が描く図形の方程式を求めてみよう。(ヒントはQRコードを読み取り、みることができる。)

ヒントを見た場合は、そのヒントにチェックを入れなさい。 ☐ ヒント1 ☐ ヒント2 ☐ ヒント3

(また解答は赤か青で記入し、自分の解答は消さないでください。)

※途中式なども記入せよ。

求める図形の方程式

よって、求める軌跡は

円 小テスト⑧

組 番 名前 ()

2 点 A (1, 0)、B (6, 0) からの距離の比が 2 : 3 である点 P の軌跡を求めよ。

求める軌跡は



授業アンケート

問1から問3に関して4段階評価でひとつに○をしてください。

4：大変あてはまる 3：ややあてはまる 2：あまりあてはまらない 1：あてはまらない

問1 ICTについて（ICT活用の効果）

- | | |
|-------------------------------------|---------|
| ① GeoGebraを使うことは、図形の動きを見る上で効果的だと感じた | 4・3・2・1 |
| ② GeoGebraを使った授業は面白かった | 4・3・2・1 |
| ③ ICTを使用した授業は、黒板のみの授業よりわかりやすいと感じた | 4・3・2・1 |

問2 授業への意欲性（情意面での効果）

- | | |
|-------------------------------------|---------|
| ① GeoGebraを使用したことで、学習に意欲的に取り組めた | 4・3・2・1 |
| ② ICTを使った授業を受けてみて、ICTを使った授業に興味を持った | 4・3・2・1 |
| ③ GeoGebraを利用し問題を解くことで、より主体的な学習になった | 4・3・2・1 |

問3 内容について（数学の理解）

- | | |
|---|---------|
| ① 条件を満たす点の軌跡は、問題文だけではイメージしにくいが、
GeoGebraでその条件と軌跡を描いてみることで、どのような図形になるか理解できた | 4・3・2・1 |
| ② 「点が図形を描く」ということを、GeoGebraを使うことでよりイメージできた | 4・3・2・1 |
| ③ GeoGebraを使うことで求める軌跡上の任意の点が
条件を満たしているかどうか、確かめやすくなった | 4・3・2・1 |