

文章題の読解方法に関する一考察
—文章題の構造とスキーマに着目して—

京都教育大学大学院 連合教職実践研究科
教職実践専攻 授業力高度化コース
176024 向山尊次

文章題の読解方法に関する一考察

－文章題の構造とスキーマに着目して－

向山 尊次
授業力高度化コース

要約：数学において文章題や証明問題の正答率の低さは以前からも大きな問題となっており、生徒からも敬遠されがちな問題である。しかし、文章題や証明問題を解くことは、合理的・論理的に物事を考え、筋道を立てて問題解決を図るために必要な過程である。そこで、数学における言葉一つ一つや、問題文の意味理解がなぜ困難なのか、また、数学の問題の構造がどのようなものであるかを分析した。その結果、数学における定義の難しさ、対象や関係を表す言葉が主な原因ではないかという結論に至った。そして、それらを解決する方法として、教科書に用いられているスキーマについて研究を重ねたところ、算数から数学に移行する段階でスキーマの種類や量が大きく減少していることが明らかになった。それを踏まえ、数学の問題を読み解き、手がかりを得るためのフローチャートを考察した。そして研究授業で扱った問題を、どのように指導すべきだったかを分析した。

キーワード：（文章理解、定義、対象と関係、AI、スキーマ）

1. はじめに

数学教育の目的として、アルゴリズムの習得を位置付ける研究がある。駒林（1971）は、「アルゴリズムとはある一定の範囲の問題に対して、その中のどんな特殊な問題が与えられても、それに一定の手続きを施して解答が得られるその『一定の手続き』のことである」と述べている。要するに、数学の文章題を考えると、ある一定の手続きを施せば解答が得られると考える研究である。しかしながら、実際の生徒の活動を見てみると、まず数学の定義や文章の意味を理解できていないのではないかという疑問を抱いた。それは、「以下の計算をなさい」という問い、いわゆる計算問題では、大半の生徒がスムーズに解答をしているにもかかわらず、「以下の文章を式で表しなさい。」「○○はいくつになるか求めなさい。」と表記される問題に対しては、ペンを動かさずに固まってしまう生徒、問題文に記されている文字や数字を加減乗除するだけの生徒、考えることを放棄し次の問題

へ移ってしまう生徒が見られるのである。これではアルゴリズムを私が提示しても、生徒はそのアルゴリズムの指示内容を理解できず、さらに混乱をきたすのではないかという危惧を抱いた。数学の文章題を解く糸口はまず、書かれている文章を理解しヒントを見つけることにある。そのためには、提示された文章題の意味をつかむことが何よりも重要である。その段階にすらたどり着けず、最初から諦める生徒を一人でも無くそうという強い思いを私は持った。

そこで、本研究では、まず数学の文章のどこにつまずくのかを明らかにし、次に数学の問題の構造を明らかにし、そして実際にどのように読み解いていけば良いかを考察する。

2. 文章題、証明問題の必要性

この章では、なぜ私が文章題や証明問題を解くことに重点を置いているのかを論述する。数学において文章題や証明問題の正答率の低さは以前からも大きな問題となっている。文部科学省中学校学習指導要領（2008）では「OECDのPISA調査など各種の調査からは思考力・判断力・表現力等を問う読解力や記述式問題、知識・技能を活用する問題に課題がある」と指摘している。また文部科学省中学校学習指導要領（2017）では「全国学力・学習状況調査等の結果から中学校では、数学的な表現を用いた理由の説明に課題が見られた。」と指摘している。

文章題や証明問題を解くことは、合理的、論理的に物事を考え、筋道を立てて問題解決を図るために必要な過程である。問題文を読み、その内容を理解したうえで、様々な数学的技法を活用しながらただ一つの答えを導き出すことや、問題文に書かれている仮説が正しいかどうかを自分自身で判断することは、思考力・判断力・表現力を育てる手段として最も適した問題なのである。計算問題はあくまで、文章題や証明問題を解くためのテクニックの一つに過ぎない。例えば「因数分解ができるからどうなのか」という問いに対し、私は「因数分解ができるだけではあまり意味がない。因数分解ができるという事実をほかのことに利用することが大事だ」と答える。因数分解は、二次方程式や二次関数の利用、さらには微分・積分などの問題を解くために大いに力を発揮するからだ。つまり文章を理解し、学んだテクニックを必要に応じて適切に使い分け、文章題や証明問題を解くことで、上記の3つの力や論理的思考を伸ばし、数学的活動の楽しさや良さを実感できると考えている。

そして文部科学省（2017）は「人工知能（以下AI）が自ら知識を概念的に理解し、思

考し始めているとも言われ、雇用の在り方や学校において獲得する知識の意味にも大きな変化をもたらすのではないかと予測も示されている。」と述べている。新井（2018）は「AIは言葉の意味を理解しているわけではなく、入力されたことに対して計算を行い、答えを出しているに過ぎない。コンピュータは計算機であり、できることは基本的には四則演算だけである。AIには意味を理解できる仕組みが入っているわけではなく、あたかも理解しているふりをしている」と述べている。

人工知能は文章の意味を理解していない。つまり読解力が皆無である。しかし、情報量と計算の速さは人間をも当然しのぎ、疑似的に問題を解くこともできる。そのことと、計算問題はできるけれども、文章題や証明問題がわからない人間とを比較するとどうなるか。当然AIが圧倒的有利な立場となる。これからの時代、AIは苦手としている一方で、人間にはできることをしなければ、生きていけなくなる時代が迫っている。だからこそ、文章の内容を理解し、どのテクニックを用いて問題を解くかを判断し、論理的に問題を解決する、つまり文章題や証明問題を解くことが必要なのである。

3. 数学の文章の特徴。

この章では、数学の文章がなぜわかりにくいのか、どのようなところがわかりにくいのかを、数学の文章に用いられている言語の特徴から明らかにする。竹山美宏（2018）は「数学の問題の内容を理解するためには、まず、問題文に含まれる数学用語の定義（意味）を知っていなければならない」と述べている。しかし、数学用語の定義の理解が簡単ではないからこそ、数学につまずく生徒が存在するのである。ではなぜ、数学用語の定義の理解に生徒は苦しむのだろうか。

数学における定義をすることのむずかしさを、新井（2008）は、「無限に存在する具体例をたった一文で正確に説明しなければならないから」と述べている。また「誰もが迷わず共通の概念にたどり着くように一通りにしか解釈できないように書かれているから」とも述べている。

数学は必ず正しい答えが導き出される教科である。それは、定義を前提として、定義に基づいて答えを求めるからである。その定義が人によって解釈がまちまちにならないように、厳密に言葉を選び出したために難しい表現方法となってしまうのである。例えば、「関数 $f(x)$ の $x = a$ から $x = a + h$ までの平均変化率 $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ において、 h が0に限りなく近づくとき、この平均変化率が一定の値に近づくならば、その極限値を、関数 $f(x)$ の $x = a$ に

おける微分係数または変化率という」という定義がある。この文章を読んでどれだけの人が微分係数について理解できるだろうか。新井（2008）も「やさしい言葉だけで数学をわかりやすく伝えられたらどんなにいいだろう。数学者はやさしい言葉だけで伝えられるように最大限の努力を払うべきである。しかしそれにはどうしても限界がある」と述べている。

次に数学の文章を読んでいてわからないと感じる原因について、新井（2008）は「たいてい対象か関係を表す言葉でつまづく」と述べている。そこで、まずは対象を表す語について検討する。そもそも「対象」という言葉が曖昧である。そこで、大辞林第三版の「はたらきかけの目標や目的とするもの。」という定義づけをして考えていきたいと思う。例えば「 n と m がともに奇数の時、 n と m の和は偶数である」という問題文がある。このとき、対象を表す語をかつこで選び出すと、「 (n) と (m) がともに奇数の時、 $((n)$ と (m) の和)は偶数である」という形になる。奇数である数は n と m にはたらきかけており、偶数である数は n と m の和にはたらきかけているからである。この n と m が奇数であることを、文字を用いて一般的にあらわすこと、 n と m の和を、文字を使って一般的に表すことが難しいと感じる要因ではないかと考察できる。

次に関係を表す語について検討する。「関係」という言葉の定義を、同じく大辞林の「物事の間は何らかのかかわりがあること」と定義する。つまり複数のものがどのように関わり合っているか、その関わりを把握することに難しさを感じているということである。数学にはこの関係性は非常によく出現する。「時間・速さ・距離」の関係性、「 x の値が定まった時に y の値も定まる」という関係性（関数）、「垂直・平行・ねじれ」の関係性 etc...。先ほどの例であれば、奇数と偶数が関係を表す語である。

以上の三点を踏まえて、以下の図 1 の問題を考える。これは、平成 30 年度の京都府公立高校の前期入試の一部である。この問題文を読み解いていくと、定義されているものは $y = ax^2$ のグラフである。そして、対象を表す語は点 A、点 B、点 C、四角形 OBCA である。最後に関係を表す語は、 $(-3, 12)$ とひし形である。このように問題文から対象と関係を表す語を抜き出し、整理することで何が読み取れるのかを大まかに把握することができるのである。しかし、それだけでは、詳細に問題を読み解き、解くことへ進むことができない。次章ではさらに読解に必要な、数学の問題自体の性質を明らかにする。

2 右の図のように、関数 $y = ax^2$ のグラフ上に点 A (−3, 12) がある。関数 $y = ax^2$ のグラフ上に点 B, y 軸上に点 C を、四角形 OBCA がひし形となるようにとる。

このとき、次の問い (1)~(3) に答えよ。(6 点)

(1) a の値を求めよ。……………答の番号【10】

(2) 直線 BC の式を求めよ。……………答の番号【11】

(3) 直線 BC 上に x 座標が正である点 D を、 $\triangle ADC$ の面積が 12 となるようにとるとき、点 D の座標を求めよ。……………答の番号【12】

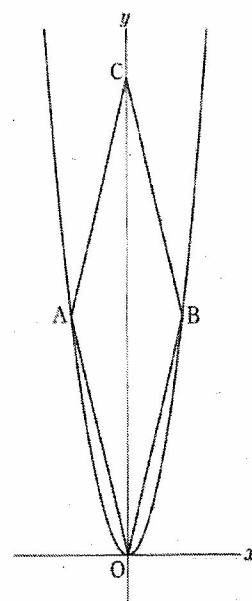


図 1 平成 30 年度京都府公立高校の前期入試問題

4. 数学の問題の特徴

この章では、数学の問題自体にどのような性質があるのかを明らかにする。竹山(2018)は「ポリアは数学の問題を大きく 2 つに分けている。それは何らかの対象を求める(計算する、作図する)ことを目的とする決定問題と、数学的な主張を証明することを目的とする証明問題である。また、決定問題と証明問題のそれぞれについて、問題の主要部分と呼ぶべき要素を挙げている。決定部分の主要部分はデータと条件と未知のもので構成されている。証明問題の主要部分は仮定と結論で構成されている。」と述べている。つまり数学の問題文はある程度決まった形で構成されているということである。

そして、数学の問題は複数の領域の概念が組み合わさって構成されているということも押さえておかないといけない。先ほどの図 1 の問題の(1)では二次関数の特徴を理解し、点 A の位置から係数 a を求める必要がある。一方(2)では四角形 OBCA がひし形であるという記述から、ひし形の特徴を理解していることがまず条件となる。また、直線 BC の式を求める、つまり一次関数の特徴を理解していなければならない。そして、(3)では三角形の面積の記述があることから、三角形の特徴を理解していることがまず条件となる。また、点 D を直線 BC 上にとるという記述から、一次関数を用いた点 D の表し方を知っていなければならない。

数学は特に積み重ねが必要な教科である。新井（2008）も「病気やけがでしばらく学校を休むと、数学の授業でやっていることがなんだかわからなくなるというケースがよくある。これは、その間に授業で扱った用語の定義が抜け落ちてしまっていることが原因だ」と分析している。要するに、文章題においては一つの単元のテクニックを用いれば解けるというものではなく、様々な単元のテクニックを必要に応じて駆使しなければならないということである。

数学の問題は、問題文から決定問題か証明問題かを判断し、そこから何を求めればよいのか、そのために使える手がかりや条件が何かを読み取った上で、今まで学習してきたものの中から、適切な技法を取捨選択しなければならないということである。

5. 数学におけるスキーマ

この章では数学の文章や定義を理解するための可視化方法について検討する。心理学用語にスキーマという言葉がある。スキーマは様々な用途で使われるため、解釈がまちまちである。そこで、スキーマの定義をラメルハート他（1988）が述べている、「記憶に蓄えられている総称的な概念をあらわすためのデータ構造である」とする。つまり、文章を読み、その概念を理解するために、自分自身が持つ記憶を引っ張り出し、それを表現するためのものと解釈できる。数学は文章をイメージし、分かりやすいものへと変化させる教科であると考えている。ある事象があり、それを自分に理解しやすいように置き換えたり書き換えたりし、そして理解するという流れである。それを実現させるためには事象の可視化は必要不可欠である。

小学校の算数と、中学校の数学の教科書を分析してみると、算数におけるスキーマの多様性を見ることができる。まず量をあらわすスキーマには数図ブロックが使われている。1の位をあらわす数はばらばらの数図ブロック、10の位をあらわす数は10個ずつに固められた数図ブロックという要領である。それらを用いて量をという概念を理解しそれを表現している。また、関係を表すスキーマには、線分図や表、数直線といった図を用いたり、リボンやロープ、写真といった身近にあるものを用いたり、長方形や三角形といった図形を用いてあらわしたりと様々である。中には線分図と長方形を組み合わせたスキーマもあり、非常に多種多様である。さらに大きな特徴は、図形のスキーマにはきちんと方眼紙がセットでついてきており、長さや面積が一目でわかりやすく表現されている点である。中学校の教科書は、図形が方眼紙に描かれていることが稀であるため、大まかな把握がし辛

いことが相違としてあげられるだろう。

一方で中学校の教科書におけるスキーマはどうなっているかを分析したところ、数直線や表といった図や、長方形や三角形といった図形を用いている点は、算数と相違はあまり見受けられない。ただし方程式の分野で用いられている天秤が中学校特有のスキーマである。この左辺と右辺のつりあいを天秤で表していることに納得がいけば、問題文に出てくる数量はどれとどれがつり合っているかを考えることができそうである。

だが全体的に小学校の算数と比べると抽象度が増している割には、それに対するスキーマの種類や量が少ないことが分かる。算数の教科書で図や写真が用いられていないページはほぼ皆無であることに對し、数学の教科書において、問題や解説文でページが埋められているページが多くなっている。ここが、数学の文章理解が進まない一つの要因ではないかと考えられる。

では、数学において、どのようなスキーマが有効であるか。まずは線分図やベン図、表や天秤など、関係図が有効とされるスキーマである。これらは、問題文に登場する対象や関係を表す語を整理するのに適したものとなっている。よく用いられる問題は、方程式や、集合、関数である。方程式とはつまり左辺と右辺が $=$ の関係で成り立っているため、何と何がつり合っているのかを線分図で表すことが効果的だと考えられる。また、集合においても A と B、B と C、C と A の関係性が問われる問題となっている。それらを問題文から正確に読み取り、図を書いて整理することで理解へとつなげられるのではないかと考えられる。また、関数も x と y の関係が問われている。数学の世界 1（大日本図書）では「ともなって変わる 2 つの数量 x, y があって、 x の値を決めると y の値がただ一つに決まるとき y は x の関数である」と定義されている。つまり、表に x に対応する y の値を記すことで、 x と y の関係を把握することができるのである。

次にグラフが有効とされるスキーマである。グラフの中でも円グラフ、折れ線グラフなど、資料の特徴を表すグラフや、放物線、直線、双曲線を表すグラフなど様々である。よく用いられる問題は、資料の活用や、関数である。これらを用いるメリットは線分図や、ベン図などの関係図で表しづらかった割合や、変化の量を明確にできることである。さらには方程式の解や不等式の意味も、グラフを描くことにより証明できるのである。

そして、多角形、回転体、展開図など図形が有効とされるスキーマである。これらは数学における幾何分野で大いに力を発揮する。問題文を正確に読み取り、辺の長さ、角度の大きさ、面積・体積等を求める場合はもちろん、最短距離を考える問題や定理の証明問題

などにも非常に役立つものである。

最後に、GRAPES や Sage、GeoGebra などの関数・幾何用の関数ソフトや Microsoft Office などの ICT 活用が有効とされるスキーマである。科学技術の進歩によって、関数を打ち込めばグラフが描けたり、動く点の動きを描写できたり、簡単に表やグラフ、図形を作成することができる。つまり、前に述べた 3 つの内容をすべてカバーできてしまうのが ICT の強みなのである。しかし一方で、それらを扱うための個のスキルや教室の設備が整っていないと用いることができないという条件がある。

中学校で学年が上がり、さらには中学校から高等学校へ進学すると、より複雑で抽象的な問題に直面することになる。その際に、書かれている問題文を様々なスキーマを用いて表現し、読み解いていくことが必ず求められるだろう。その場面で、図に表し問題文を把握することで、スムーズに問題解決へと進むことができるだろう。

6. 問題文の読み解き方

この章では、今までのことを踏まえ、一般的に数学の文章題をどのように読み解いていくかを考察する。

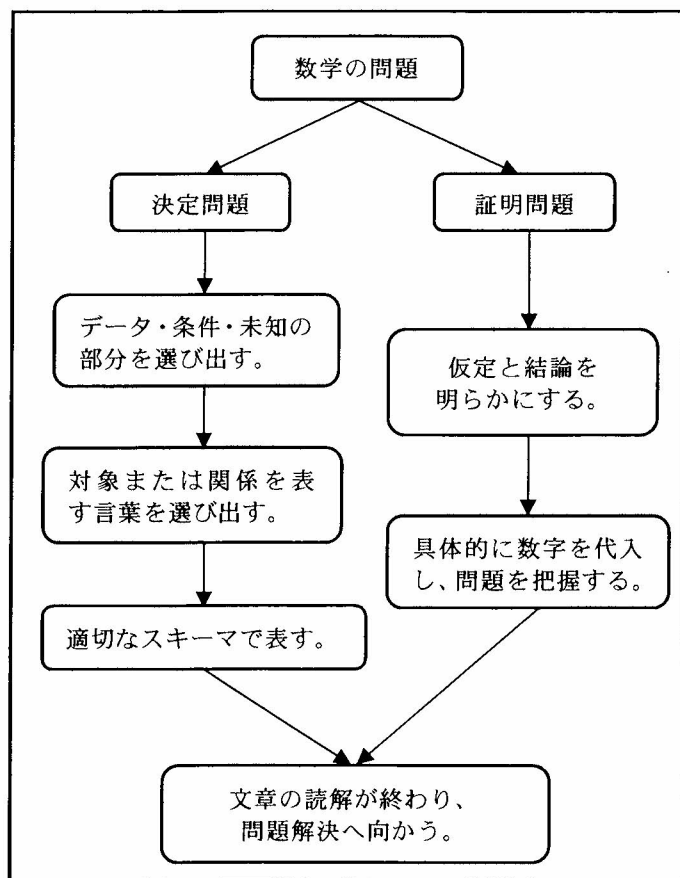


図 2 問題文読解の手順

まず初めにすべきことは、問題自体が決定問題なのか、証明問題なのかの判断である。そして、決定問題では、問題文からデータと条件と未知の部分を選び出す操作、証明問題では、仮定と結論を明らかにする操作を行う。さらに決定問題では、データと条件から、対象または関係に関する語を選び出した後に、スキーマで表わす（可視化する）操作を行う。逆に証明問題では、具体的に数字を当てはめて問題を把握する。そして問題解決に向かうという流れを私は考えた。下の図は私が考えた、数学の問題文や問題構造を理解して解いていくためのフローチャー

一斉授業の問題の(1)で二元一次方程式が1つの時、方程式の解が複数あることを知り、(2)で2つ二元一次方程式があると解が一つに定まることを理解し、(3)で少し数値を変える。さらに個別問題で全く別の問題で定着を図るという趣旨で作った問題である。また、今回の問題は教科書からの抜粋ではなく、生徒たちの身の回りにおける状況から問題を作成しようと考えた。生徒たちにとって身近な出来事を問題にすることで、少しでも数学の文章題を解くことに対する抵抗を減らそうという思いがあったからである。この一斉授業の問題の文章理解についての指導方法を分析する。

まずこの問題は、3人班と2人班がそれぞれ何個ずつできるかを求める問題なので、決定問題であることを明確にする。そして、データ・条件・未知の部分を選び出す操作へと移る。まずデータの部分は、(1)では、3人もしくは2人の班で行動する、2-Aは全員で30人の部分が当てはまる。(2)ではそれにプラスして、先生の人数が12人という要素が加わる。そして条件の部分は(1)に関してはない。(2)では、各班に一人ずつ先生が引率するという条件が加わる。さらに未知の部分は、3人の班と2人の班はそれぞれいくつできるかという部分へと整理することができる。ここではデータ・条件・未知の部分に対して、色を変えて、下線を引かせるよう指導するとさらにわかりやすいかもしれない。

次にデータの部分から、対象または関係を表す語を整理する操作を行う。ここでこの文章で対象を表す語をカッコでくくると、以下のようになる。

『(1)校外学習で京都市内に出かけます。そのとき、((3人)もしくは(2人)の(班))で行動をします。((3人)の(班))、(2人)の班はそれぞれいくつできるでしょう。』

『(2)校外学習には(各班)に(ひとりずつ)、先生が引率します。(先生の人数)が全員で(12人)の時、3人の班、2人の班はそれぞれいくつできるでしょう。』

この3人班、2人班という対象を表す語、それらの班員の合計が何人かという関係を読み解けるかどうかが一番重要である。特に方程式で大切な“=”の関係をもっと強調しなければならなかったと考える。

次に、データや条件における、対象や関係を表す語を適切なスキーマで表すことについては、磁石とホワイトボードを用いて班の合計数と、生徒の人数の関係を可視化できたところはよかったのではないかと考えられる。一方スキーマとして表を用いてはいるものの、線分図の導入を考えてもよかったのではないかと考える。表の役割としては、答えを見つけるためのものであり、問題文の把握をするためには、3人班と2人班の個数を合わせる

と 12 班になる、3 人班と 2 人班の人数の合計が 30 人になるという以下の図 5 があるとい
いだろう。

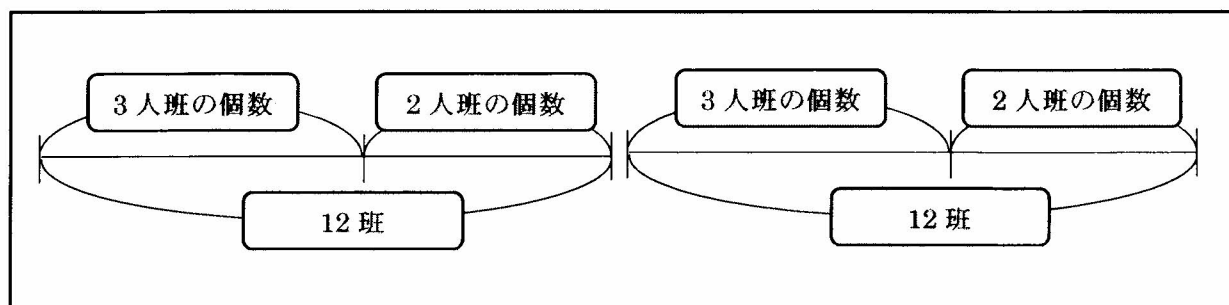


図 5 二次方程式の問題文読解スキーマ

この流れがあった後に、表を使って問題を促したほうがより良かったのではないかと、
研究を通して考えた。

8. まとめと今後の課題

本研究では、数学の定義や、文章における読解について焦点を当て、どのように数学の
文章を読み解いていけばよいかということについて言及した。その結果、無限に存在する
具体例をたった一文で正確に説明しなければならず、そのうえ誰もが迷わず共通の概念に
たどり着くように一通りにしか解釈できないように書かれているからということが判明し
た。また数学の文章の読解では、対象または関係を表す言葉につまづくということが判明
した。そして、それらの問題の解決方法としてスキーマについて検討し、小学校の算数か
ら中学校の数学へと抽象的になるにもかかわらず、数学におけるスキーマの活用がうまく
行われていないことを明らかにした。そして、問題によってどのようなスキーマが有効で
あるかを考察し、生徒自らが表現できるように指導していく必要があることを示した。さ
らに、文章読解のためのフローチャートを作成し、文章題が出てきた場合にどのように内
容を理解し、手がかりを得ていくかという道筋を提示した。

文章を理解し、その指示や条件に従って問題を解決するという場面、つまり読解力・論
理的思考力・判断力が必要な場面は、社会では数多く存在する。例えば、取扱説明書がい
い例だろう。買った商品を組み立てるときには、そこに書かれている指示を理解し、組み
立てなければならない。そして注意事項についても理解し、安全に使用しなければならない。
このようにあらゆる場面で上記のことは存在する。その時に、書いてある文章から適切
に情報収集をし、行動することが大切である。数学はそのためのトレーニングとして非

常に有効である。

今後の課題としては、あらゆる問題でこの方法が適切かどうかを検証していくことである。特定の問題だけではなく様々な領域をまたいでも、この方法で読み解くことができるかどうかを分析する必要がある。

引用文献・参考文献

- ・ 新井紀子（2008）『数学は言葉』東京図書株式会社。pp20-28、pp122-126
- ・ 新井紀子（2018）『AI VS 教科書が読めない子どもたち』東洋経済新報社。
pp107-108、pp184-189
- ・ 岩崎秀樹（2010）『新しい学びを拓く数学科授業の理論と実践 中学・高等学校編』
ミネルヴァ書房
- ・ 垣内賢信 G. ポリア（1960）『いかにして問題をとくか』丸善株式会社
- ・ 駒林邦男 銀林浩（1971）『アルゴリズムと発見学習』明治図書
- ・ 相馬一彦（2015）『新版 数学の世界 2』大日本図書
- ・ 竹山美宏（2018）『定理のつくり方』森北出版。pp7-8
- ・ 文部科学省（2008）『中学校学習指導要領解説 数学編』
- ・ 文部科学省（2017）『中学校学習指導要領解説 数学編』
- ・ 山田浩貴（2006）『文章題の解決における問題スキーマの役割とその構成に関する研究』兵庫教育大学大学院学位論文
- ・ D.E.ラメルハートほか 3 名（1988）『PDP モデルー認知科学とニューロン回路網の探索』森北出版。p378
- ・ 内閣府科学技術基本計画
<http://www8.cao.go.jp/cstp/kihonkeikaku/index5.html> （参照日：2018.12.25）
- ・ リセママ 超スマート社会とは【ひとことと言うと？教育 ICT 用語】
<https://resemom.jp/article/2016/06/25/32284.html> （参照日：2018.12.25）
- ・ 内閣府 society 5.0 とは
http://www8.cao.go.jp/cstp/society5_0/index.html （参照日：2018.12.23）
- ・ 京都府・滋賀県公立高校入試問題と解答 平成 30 年ー京都新聞
<https://www.kyoto-np.co.jp/campus/kouritsu/> （参照日：2018.12.25）