

平成 29 年度 修士論文

折り紙の作図可能性と平坦に折り畳まれる折り紙の代数表現

京都教育大学大学院教育学研究科
教科教育専攻数学教育専修 165036

野坂 康祐

2018/02/13

目次

1	はじめに	2
2	一回折りの定理	4
2.1	序論	5
2.2	アライメントモデルと一回折りの定理	6
2.3	一回折りにおける折り線の存在条件	8
3	折り紙作図	13
3.1	序論	13
3.2	作図論	19
3.3	体の拡大	23
3.4	ユークリッド作図可能性	25
3.5	折り紙作図法	28
3.6	折り紙作図可能性	32
3.7	ギリシャの三大作図問題の作図可能性	36
4	平坦折り紙の代数表現	38
4.1	序論	38
4.2	仮想平坦折り紙	40
4.3	仮想平坦折り紙による折り鶴の代数表現	42
4.4	折り紙用語の代数表現	50
4.5	可折平坦折り紙	53
4.6	折り紙同形	55
5	おわりに	57
	謝辞	58
	参考文献	58

1 はじめに

日本の伝統的な遊びでもある「折り紙」は海外でも“origami”という単語が存在するように、芸術として世界的に知られているが、近年では折り紙を科学的に考察・応用しようという試みが多数行われている。こうした研究は2年に1度開催される「折り紙の科学、数学、教育に関する国際会議（OSME）」や日本折り紙協会の発行する論文集「折り紙の科学」などで見る事ができる。また、OSMEのタイトルに「教育（Education）」という言葉が含まれているように、学校教育においても、折り紙を用いた教材を開発しようという取り組みが行われ始めている。このようなことから、教育大学の教科教育専攻（数学）として、折り紙の数学的アプローチについて取り扱うことは有意義であると判断し、その研究を学部生時を含めて3年間行ってきた。本論文は、こうした研究活動の1つのまとめとなるものである。

折り紙に関する数学的アプローチについては、主に「折り線に注目した考察」と「折った形に注目した考察」の2つに分けて考えることができる。特に前者については、「与えられた点や直線を指標として紙を1回折る方法は全てで7通りである」（一回折りの定理、折り紙の公理などと呼ばれる）ことが証明された [1] ことを皮切りに、立方根や任意の角の三等分線が紙を折ることで作図可能であることが示される [2] など、折り紙の作図可能性という話題へつながる。一方、後者についてはあまり体系的な議論がなされていない。というのも、折り紙の包括的な定義について未だ現実の折り紙に見合ったものが存在していないということが1つの要因となっている（例えば Hull [3] による定義、Belcastro と Hull [4] による定義などがあるが、どちらも未定義語が存在している）。しかしながら、平坦に折り畳まれた折り紙の局所的な性質についての工学的通説である前川の定理、川崎の定理は数学的な保証ができていないにも関わらず、今や折り紙の工学的応用の基礎となっている他、個々の折り紙作品についての数学的考察が行われているというのが現状である。

さらに発展的な話題としては、1つの折り線を構成する折り方を考える一回折りだけでなく、2本以上の折り線を構成する折り方を考える複数回折りや、折り紙作図を拡張しコンパスも用いたコンパス折り紙作図、折り線が与えられた展開図が折り畳めるかどうかを判定する平坦可折判定、曲線を折り線にした場合の折った形を考える曲線折り紙、そして折り紙を「 n 次元超平面を $n-1$ 次元超平面で折る」として見る高次元折り紙などの研究が報告されている（例えば [5], [6], [7] で見る事ができる）。特に、平坦可折判定の研究については、Bern と Hayes [8] が山折り谷折りが指定された紙に対して平坦に折り畳むことができるかどうかの一般的な問題は NP 困難であることを示している。以上のような折り紙の数学的アプローチをまとめた概観を図1に記した。

ここでの点線と実線での結び方の違いは、点線部分には数学的な繋がりを示す根拠がはっきりしていないという意味がある。すなわち前述からも分かるように、折り紙の数学的アプローチは「折り紙」というものの概念がはっきりしないまま、折り紙に見られる性質を個々に抜き取って、それらを独立させて研究が行われているということである。「折り紙とは何か？」と問われたときに、これまでの成果では、個々の性質は答えられるが、折り紙そのものについての明確な答えを持ち合わせていないのである。

そこで本論文では、平坦に折り畳まれる折り紙だけに限った代数表現（可折平坦折り紙という）を構成し、この枠組みの中で前川の定理および川崎の定理が成り立つことを示す。また、折り線に注目した考察として一回折りの定理から始まる折り紙の作図可能性についても体系的に論じる。これは、2つを合わせることで折り紙の数学的アプローチを体系化させることを目的としたものである。

具体的に、本論文の構成について述べる。第2章で一回折りの定理について [1] による方法で証明し、[10]に基づき折り線の存在条件を考察する。第3章では、そこからの発展的な話題である折り紙作図について、[2]による方法を参考に、折り紙作図可能定理に至るまでの道筋を記す。第4章では、平坦折り紙の代数表現として可折平坦折り紙を提唱し、これによる様々な折り紙の性質の証明を、前述した前川の定理、川崎の定理も含めて行う。第2、3章と第4章は独立した内容となっており、細かい定義を除けば第4章から読み進めることも可能である。しかしながらこれらの結果は合わせることで、現実の折り紙に近い操作で平坦折り紙を論じることができる。これについては、最後のまとめとして第5章に記した。また、可折平坦折り紙では表現できない折り方なども含めた今後の課題についてもこの章で扱う。

折り紙を体系的に論じている文献はあまり見られないため、本論文が折り紙の数学的アプローチを学ぶ者にとっての1つの指南となれば幸いである。

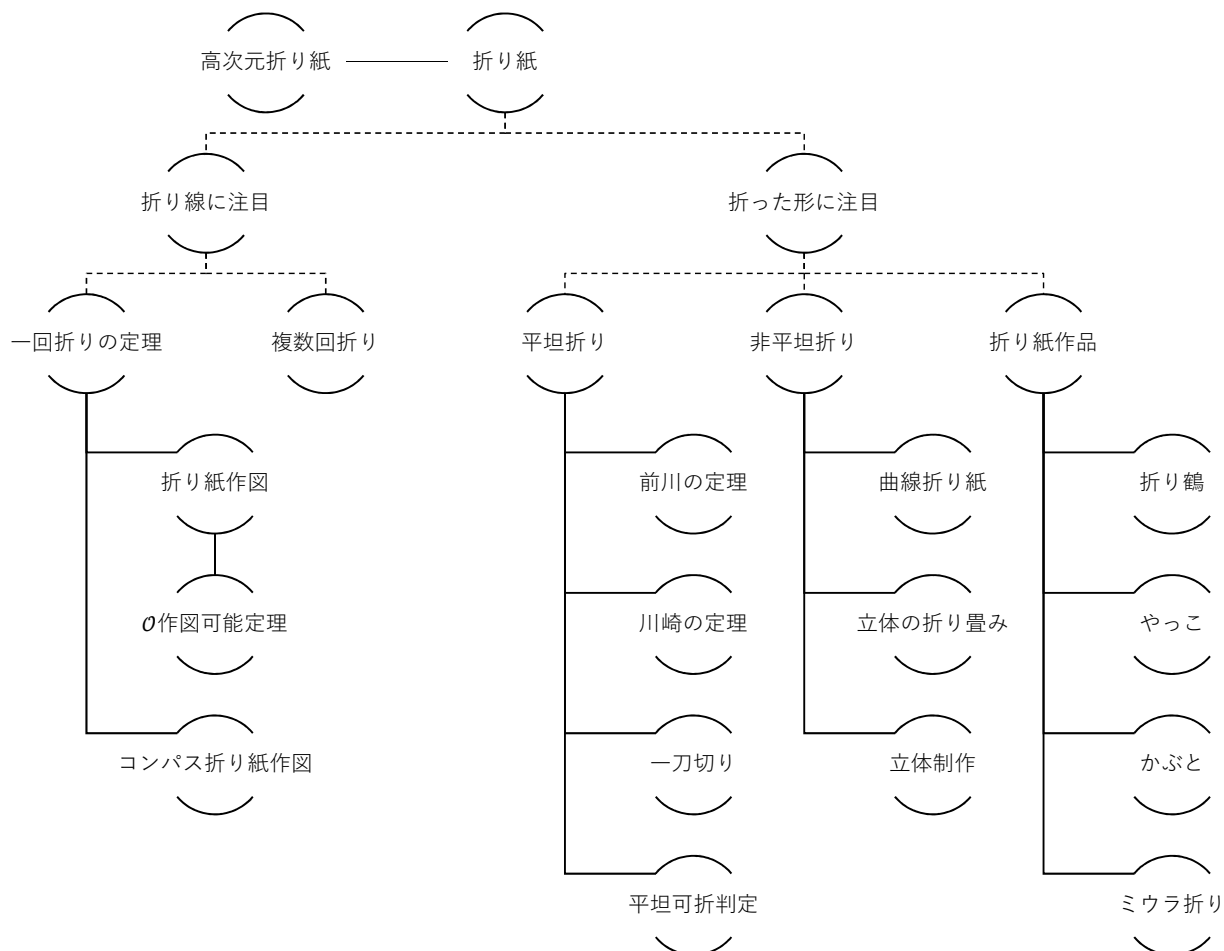


図 1: 折り紙の数学的アプローチの概観

2 一回折りの定理

紙の上に2つの点を与えられているとする. この時, 我々は点と点を重ねて紙を折ることができる他, 2つの点を通るようにして紙を折ることもできる. また2本の直線を与えられているならば, 直線と直線を重ねて紙を折ることができる. このように, 紙の上に点や直線が与えられている時, これらを指標にして紙を1回折る方法(折り方)にはどのようなものがあるのだろうか. その答えは, 一回折りの定理によって次の7通りであることが示された.

($\mathcal{O}_1$) 2点 p, q がある時, 2点を通るただ1つの折り方がある.

($\mathcal{O}_2$) 2点 p, q がある時, p を q に重ねるただ1つの折り方がある.

($\mathcal{O}_3$) 2直線 L, M がある時, L を M に重ねる折り方がある.

($\mathcal{O}_4$) 1点 p と1直線 L がある時, L に垂直で p を通るただ1つの折り方がある.

($\mathcal{O}_5$) 2点 p, q と1直線 L がある時, p を L に重ねて q を通る折り方がある.

($\mathcal{O}_6$) 2点 p, q と2直線 L, M がある時, p を L に重ねて q を M に重ねる折り方がある.

($\mathcal{O}_7$) 1点 p と2直線 L, M がある時, p を L に重ねて M に垂直な折り方がある.

これらは図2のように表すことができる.

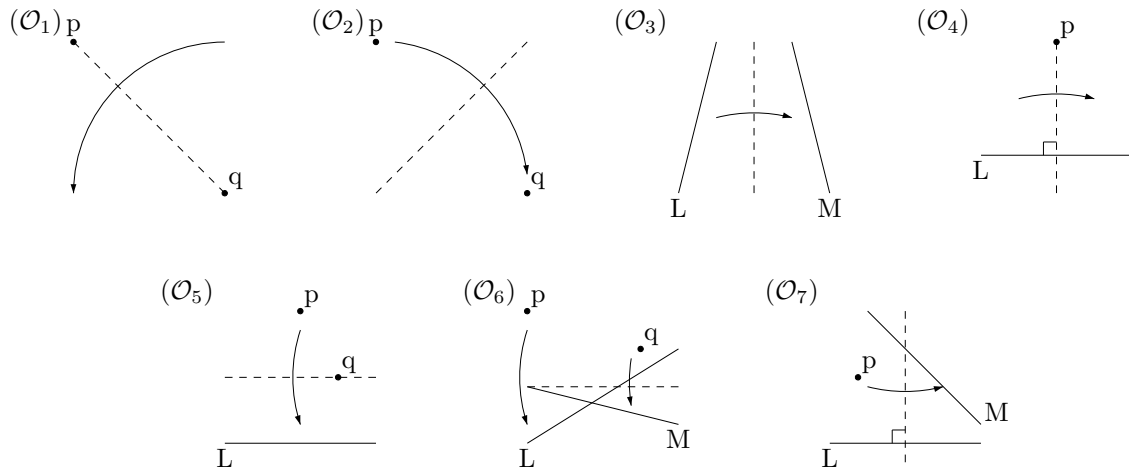


図 2: 一回折りの定理による折り方のイメージ

これらは当初, 定理として証明された形で報告されたわけではなく, 藤田 [9] が ($\mathcal{O}_1$), ..., ($\mathcal{O}_6$) の折り方があることを報告し, その後, 他の研究者たちにより ($\mathcal{O}_7$) の折り方があることが発見された. つまり, 折り方はこの7つで全てであろうという予想はされていたが, 数学的な証明はなされていなかったのである. この名残から, 一回折りの定理は今も折り紙公理という別の名前呼び親しまれている. しかし, 本論文でも一回折りの「定理」と呼称しているように, これは数学的な「公理」ではないことに注意してもらいたい. 実際, Alperin と Lang[1] はこれを, ユークリッド公理系を前提として導かれる定理として証明した. 本章はこの一回折りの定理の証明の流れの記述と, 一回折りの定理についての更なる考察を目的とする.

2.1 序論

本章で扱う基礎的な知識について、本節でまとめる。また今後、すべての章をユークリッド距離空間 $(\mathbb{R}^2, d)$ 上で議論する。

定義 2.1.1 (点と直線). (1) $\mathbb{R}^2$ の元 $p = (a, b)$ を点といい, $p(a, b)$ または点 p などと表す. また組 (a, b) を点 p の座標という.

(2) ある実係数 1 次方程式 $ax + by + c = 0$ ($a \neq 0$ または $b \neq 0$) の解集合 $L = \{(x, y) \mid ax + by + c = 0\}$ を直線といい, 直線 L または直線 $L : ax + by + c = 0$ などと表す.

定義 2.1.2 (点と直線の距離). 点 $p(x_0, y_0)$, 直線 $L : ax + by + c = 0$ について, p と L の距離 $d(p, L)$ を次のように定める.

$$d(p, L) = d(L, p) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

定義 2.1.3 (標準係数). 直線 $L : ax + by + c = 0$ について, 次の操作を行う.

(1) $b \neq 0$ のとき, 方程式全体を b で割る.

(2) $b = 0$ のとき, 方程式全体を a で割る.

このようにして求められる各項の係数を L の標準係数といい, このような方程式全体の元を直線 L の標準形式という.

命題 2.1.4. 異なる 2 点 $p(a, b), q(c, d)$ を含む直線の標準形式は一意に定まる.

証明 . $a = c$ のとき, 2 点を通る直線は標準形式で $x - c = 0$ と表せる. $a \neq c$ のとき, 2 点を通る直線は $(b - d)x - (a - c)y + (ad - bc) = 0$ と表せる. $a - c$ で割ると, 標準形式 $-\frac{b - d}{a - c}x + y - \frac{(ad - bc)}{a - c} = 0$ を得る. $\square$

定義 2.1.5 (2 点を通る直線). 命題 2.1.4 により, 異なる 2 点 p, q により, 1 つの直線が定まる. この直線を $\text{Line}(p, q)$ と表し, 点 p, q を通る直線という.

定義 2.1.6 (平行). 2 直線 L, M の標準形式をそれぞれ $ax + by + c = 0, sx + ty + u = 0$ とする. このとき L と M が平行であるとは, 次のいずれかの条件を満たすことをいう.

(1) $b, t \neq 0$ かつ $a = s$

(2) $b = t = 0$

L と M が平行であるとき, $L \parallel M$ と表す.

定義 2.1.7 (垂直). 異なる 2 直線 $L : ax + by + c = 0$ と $M : sx + ty + u = 0$ が垂直であるとは, 次のいずれかの条件を満たすことをいう.

(1) $b = 0$ かつ $s = 0$, または $a = 0$ かつ $t = 0$

(2) $b \neq 0$ かつ $t \neq 0$ のとき, $as = -bt$

L と M が垂直であるとき, $L \perp M$ と表す.

以上により, 数学的に折られた状態を表すために用いる「鏡映変換」が定義できる.

定義 2.1.8 (鏡映変換). L を直線とする. 写像 $R_L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ が直線 L に関する鏡映変換であるとは, 任意の元 $p \in \mathbb{R}^2$ について $R_L(p)$ が以下のいずれかの条件を満たすことをいう.

(1) $p \in L$ のとき, $R_L(p) = p$

(2) $p \in L$ のとき, $d(p, L) = d(R_L(p), L)$ かつ $\text{Line}(p, R_L(p)) \perp L$

定義 2.1.8 が well-defined であること, すなわち任意の元 $p \in \mathbb{R}^2$ について $R_L(p)$ が一意に定まることは, 命題 3.2.8 で述べている.

定義 2.1.9 (合同変換). 写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ が合同変換であるとは, f が鏡映変換の有限回の合成で表せることをいう. 特に, f が偶数回の鏡映変換で表せるとき, f を回転変換という. また, 集合 $A, B \subset \mathbb{R}^2$ について, $f(A) = B$ となるような合同変換 f が存在する時, A と B が合同であるといい, $A \equiv B$ と表す.

定義 2.1.10 (恒等変換). 集合 X について, 写像 $1_X: X \rightarrow X$ を $1_X(x) = x$ となるように定める. これを X の恒等変換という.

命題 2.1.11. L を直線とする. $R_L \circ R_L = 1_{\mathbb{R}^2}$ である.

証明. $R_L \circ R_L \neq 1_{\mathbb{R}^2}$ であると仮定する. すなわち, $a \neq R_L \circ R_L(a)$ なる元 $a \in \mathbb{R}^2$ があるということである. このとき, a と $R_L \circ R_L(a)$ は異なる点であるが, 直線 L との距離が異なる場合, 3 点 $a, R_L(a), R_L \circ R_L(a)$ が同一直線上でない場合のどちらも, 定義 2.1.8 と矛盾する. ゆえに, そのような異なる 2 点は存在しないため, $a = R_L \circ R_L(a)$ であると言える. $\square$

定義 2.1.12 (放物線). 点 p と直線 L が $p \notin L$ を満たすとする. このとき,

$$\text{Prb}(p, L) = \{q \in \mathbb{R}^2 \mid d(p, q) = d(q, L)\}$$

を焦点 p , 準線 L とする放物線という.

すなわち Prb とは $\mathbb{R}^2$ 上の点と直線の直積集合から二次曲線全体への写像である. 二次曲線の定義および Prb の well-defined 性については副論文第 2.1 節に記載している.

2.2 アライメントモデルと一回折りの定理

以下, $\mathbb{R}^2$ の部分集合 (または元) のことを図形という.

定義 2.2.1 (折り返し). 直線 F に関する鏡映変換 R_F について, 図形 A の像 $R_F(A)$ を折り線 F による図形 A の折り返しといい, これを $F(A)$ と略記する.

命題 2.2.2. $a, b \in \mathbb{R}^2$, $A, B \subset \mathbb{R}^2$, F を直線とする.

(1) $F(F(a)) = a$, $F(F(A)) = A$

(2) $F(a) = b \Leftrightarrow F(b) = a$, $F(A) = B \Leftrightarrow F(B) = A$

(3) $F(a) \in A \Leftrightarrow a \in F(A)$

証明. (1) 同じ鏡映変換の合成は恒等変換, すなわち $F \circ F = 1_{\mathbb{R}^2}$ である. ゆえに $F(F(a)) = 1_{\mathbb{R}^2}(a) = a$ である. 集合 A についても同様である.

(2) $F(a) = b$ より, $F(b) = F(F(a)) = a$ が成り立つ. 逆も $F(a) = F(F(b)) = b$ となり成り立つ. 集合 A, B についても同様である.

(3) $F(a) \in A \Leftrightarrow F(F(a)) \in F(A) \Leftrightarrow a \in F(A)$ $\square$

定義 2.2.3 (アライメント). 点または直線について, 次で定める対称な 2 項関係 $A \leftrightarrow B$ をアライメントという:

- (1) 点 p, q に対して, $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow p = q$
- (2) 直線 L, M に対して, $L \leftrightarrow M \Leftrightarrow L = M$
- (3) 点 p と直線 L に対して, $p \leftrightarrow L \Leftrightarrow p \in L$

以上で定義した折り返しとアライメントを組み合わせると, 次のようなことが分かる.

命題 2.2.4. p, q : 異なる 2 点, L, M : 異なる 2 直線 とする. この与えられた点や直線を折り線 F によって折り返した図形が自分自身や他の与えられた点や直線に重なる (すなわち, アライメントが成り立つ) 場合を考える. 考えられる全て場合は次の 5 通りである:

- (AL1) $F(p) \leftrightarrow q$
- (AL2) $F(L) \leftrightarrow M$
- (AL3) $F(L) \leftrightarrow L$
- (AL4) $F(p) \leftrightarrow L$
- (AL5) $F(p) \leftrightarrow p$

これら全ての場合において, 条件を満たす折り線 F は存在する.

注意. 命題 2.2.2 より, $F(p) \leftrightarrow q \Leftrightarrow p \leftrightarrow F(q)$ であり $F(L) \leftrightarrow M \Leftrightarrow L \leftrightarrow F(M)$ であり $F(p) \leftrightarrow L \Leftrightarrow p \leftrightarrow F(L)$ である.

証明. (AL1) の場合, 折り線 F は p, q を端点とする線分の垂直二等分線である.

(AL2) の場合, 折り線 F は p を焦点, L を準線とする放物線の接線である.

(AL3) の場合, 折り線 F は L, M の成す角の二等分線である ($L \parallel M$ の時は L と M の中間線である).

(AL4) の場合, 折り線 F は L の垂線である.

(AL5) の場合, 折り線 F は p を通る直線である.

これらは図 3 のように表すことができる.

□

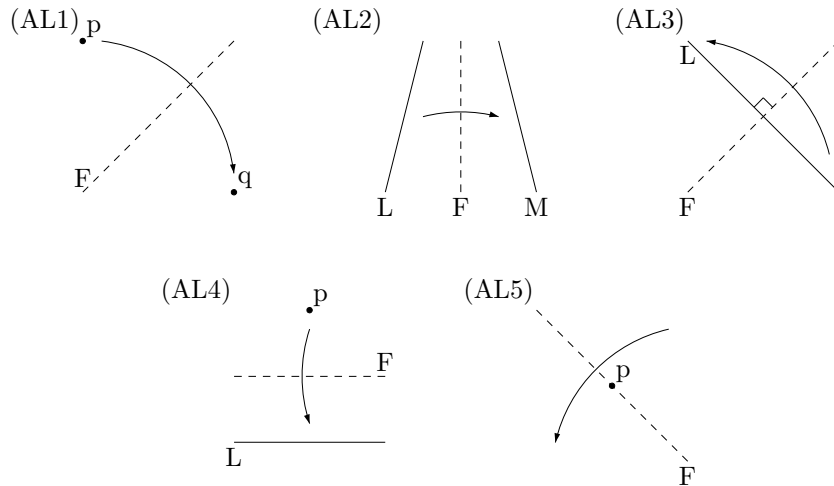


図 3: それぞれのアライメントのイメージ

この命題 2.2.4 は一見すると「与えられた点や直線を指標とした折り方」を表しているように見える。確かに, (AL1) は折り線が 1 つに, (AL2) は折り線が 1 つか 2 つに定まり, 折り方を表しているとしても良

さそうだが, $(AL3), (AL4), (AL5)$ はいずれも, 折り線が与えられた点や直線に関係なく無限個存在するため, 折り方を表しているとして見るには無理がある. そこで, この $(AL3), (AL4), (AL5)$ をそれぞれ組み合わせ, 折り線が有限個に決まる可能性があるものを探る. これを満たす極小な組み合わせと, $(AL1), (AL2)$ を合わせたものが, 次の一回折りの定理である.

定理 2.2.5 (一回折りの定理). p, q : 異なる 2 点, L, M : 異なる 2 直線とする. $(AL1), \dots, (AL5)$ の中で, これらの組み合わせ (または自分自身のみ) の中で, 点や直線の位置関係によっては折り線 F が有限個に決まり, 組み合わせとして極小なものは, 次の $(O_1), \dots, (O_7)$ だけである.

(O_1) $(AL5)$ と $(AL5) : F(p) \leftrightarrow p$ かつ $F(q) \leftrightarrow q$

(O_2) $(AL1) : F(p) \leftrightarrow q$

(O_3) $(AL2) : F(L) \leftrightarrow M$

(O_4) $(AL3)$ と $(AL5) : F(L) \leftrightarrow L$ かつ $F(p) \leftrightarrow p$

(O_5) $(AL4)$ と $(AL5) : F(p) \leftrightarrow L$ かつ $F(q) \leftrightarrow q$

(O_6) $(AL4)$ と $(AL4) : F(p) \leftrightarrow L$ かつ $F(q) \leftrightarrow M$

(O_7) $(AL3)$ と $(AL4) : F(L) \leftrightarrow L$ かつ $F(p) \leftrightarrow M$

証明. まず, それぞれ折り線が具体的に定まることを示す. 一般に直線が存在するとは限らない場合についても, 点や直線の位置関係を明らかにすることで具体的に定まることを示す.

(O_1) の場合, 折り線 F は p, q を通る直線となる.

(O_4) の場合, 折り線 F は p を通る L の垂線となる.

(O_5) の場合, $p \notin L$ であれば, 折り線 F は q を通る焦点 p , 準線 L とする放物線の接線となる.

(O_6) の場合, $p \notin L \cup M$ かつ $q \notin L \cup M$ であれば, 折り線 F は焦点 p , 準線 L とする放物線と焦点 q , 準線 M とする放物線の共通接線となる.

(O_7) の場合, $p \notin M$ であれば, 折り線 F は L に垂直な焦点 p , 準線 M とする放物線の接線となる.

これらは図 2 のように表される.

次に, 極小なアライメントの組み合わせが以上の 7 つであることを示す. これは, $(AL3)$ 同士をいくら組み合わせても, 折り線 F は無限個存在するか存在しないことを示せばよい (もし他のアライメントを組み合わせた場合, それは極小ではないからである). 実際, 折り線が $(AL3)$ を満たすためには, 折り線は与えられた直線に対して平行でなければならないため, どんなに $(AL3)$ を組み合わせたとしても, 与えられた直線が全て平行ならば折り線は無限個存在し, 1 つでも平行でないものがあれば折り線は存在しない. ゆえに, $(AL3)$ 同士をいくら組み合わせても折り線が有限個に決まることはない. $\square$

一回折りの定理により, 与えられた点や直線から折り線 F を導くという操作を「折り方」と呼称することで, 本章の冒頭で述べたような言い換えができる.

2.3 一回折りにおける折り線の存在条件

定理 2.2.5 において, $(O_1), \dots, (O_7)$ とは「点や直線の位置関係によっては」折り線が有限個に決まるアライメントの組み合わせというものであった. すなわち, 一般的には折り線が存在するとは限らないのである. 実際に, 以下にいくつかの例を挙げる.

(例 1) (O_5) について, L と q の距離が p と q の距離よりも長い場合, 条件を満たす折り線 F は存在しない.

(例 2) (O_7) について, L と M が平行な場合, 条件を満たす折り線 F は存在しない.

(例3) $(\mathcal{O}_6)$ について, L と M が平行かつ L と M の距離が p と q の距離よりも長い場合, 条件を満たす折り線 F は存在しない.

このように, 点や直線が与えられていても, 実際に折れるかどうかはまだ定かではない. 必ず折り方が存在するためには, 定理 2.2.5 にどのような条件を付加すればよいだろうか. 羽鳥 [10] によれば, 「2 点 (異なっているとは限らない) と 2 直線が与えられているとき, 2 直線が平行でなければ必ず折り方が存在する」という. ここからは, この事実についてまとめていく.

議論の簡略化のために, まずは $(\mathcal{O}_1), \dots, (\mathcal{O}_7)$ の相互関係について考えよう. $(\mathcal{O}_1), \dots, (\mathcal{O}_5), (\mathcal{O}_7)$ は「2 点」「1 点と 1 直線」「2 直線」「2 点と 1 直線」「1 点と 2 直線」のいずれかによって折り線を導くものであったのに対し, $(\mathcal{O}_6)$ は「2 点と 2 直線」で折り線を導くものであった. すなわち, 点や直線を同一視すれば, 全ての操作が $(\mathcal{O}_6)$ だけで表現できるものと考えられる. このことを踏まえると, 本節で示すべき事項は次のようになる.

定理 2.3.1 (折り線の存在条件). 任意の 2 つの点 p, q 及び任意の 2 つの平行でない直線 L, M について, $F(p) \leftrightarrow L \wedge F(q) \leftrightarrow M$ を満たす折り線 F は必ず有限個存在する.

まず, $(\mathcal{O}_6)$ を具体的に表現しよう. そのために p を $(0, 1)$ の点, L を $y + 1 = 0$ の直線, q を (a, b) ($a, b \in \mathbb{R}^2$) として, L 上を点 t が動くとき, p と t を重ねて折った際に q が移る点 q' の軌跡 (すなわち, q を p, t を端点とする線分の垂直二等分線による鏡映変換で移した点の軌跡) を求める.

2 点 p, t を指標として $(\mathcal{O}_1)$ で導かれる折り線を F とし, $q'(X, Y)$ とする. 直線 qq' の傾きは $\frac{Y-b}{X-a}$ であるから, 直線 F の傾きは $-\frac{X-a}{Y-b}$ である. ゆえに, 直線 F は, $y = -\frac{X-a}{Y-b}x + c$ と表せる. 直線 qq' と直線 F の交点 R は $\left(\frac{X+a}{2}, \frac{Y+b}{2}\right)$ であるから, これを代入して, $y = -\frac{X-a}{Y-b}x + \frac{Y+b}{2} + \frac{(X+a)(X-a)}{2(Y-b)}$ が求められる. また $t(d, -1)$ とおくと, 直線 pt の傾きは $-\frac{2}{d}$ と表せ, 直線 pt と直線 F の交点 s は $(\frac{d}{2}, 0)$ となる. さらに, $pt \parallel qq'$ より $-\frac{2}{d} = \frac{Y-b}{X-a}$ である. よって $d = -\frac{2(X-a)}{Y-b}$ となり, s は $\left(-\frac{X-a}{Y-b}, 0\right)$ となる. 最後に, 直線 F に s の点を代入すると, $(Y+b)(Y-b)^2 + (X^2 - a^2)(Y-b) + 2(X-a)^2 = 0$ となり, q' の軌跡が次のように求まる:

$$(y+b)(y-b)^2 + (x^2 - a^2)(y-b) + 2(x-a)^2 = 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$(\mathcal{O}_6)$ で導かれる折り線は, この q' の軌跡と直線 M の交点と, q を指標として $(\mathcal{O}_2)$ によって導かれる折り線に一致する. すなわち, ① の方程式と直線 M の方程式を連立させた時に実数解を持つならば, 折り線が有限個存在することが言える. そこで, 実数解をもつ条件を調べることで折り線が存在する場合としない場合を判別する. この際, p, q, L, M の位置関係によって使える折り方が変わってくるため, 次のように場合分けして考える.

- (1) p, q が L, M 上にない
- (2) p が M 上かつ q が L 上
- (3) p が L, M 上になく q が L 上 (p が M 上で q が L, M 上にない)
- (4) P が l, m 上になく Q が m 上 (P が l 上で Q が l, m 上にない)
- (5) p が L 上で q が M 上

以下よりそれぞれについて, 実数解を持つ条件を調べる.

(1) $L \perp M$ の場合, M の方程式は $x = c$ ($c \neq a$) と表せる. これを ① に代入すると,

$$y^3 - by^2 - (a^2 + b^2 - c^2)(y - b) + 2(a - c)^2 = 0$$

ここで, 次の定理を示す.

定理 2.3.2. 実数係数の 3 次方程式は少なくとも 1 つの実数解をもつ.

定理 2.3.2 の証明にあたり, 次の中間値の定理を用意する. 証明は本筋から逸れるため省略する.

補題 2.3.3 (中間値の定理). $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ ($a \leq b \in \mathbb{R}$) とし, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$: 連続関数とする. また, $f(a) \leq \gamma \leq f(b)$ なる $\gamma \in \mathbb{R}$ があるとする. この時, 次が成り立つ:

$$\exists c \in [a, b] \text{ s.t. } f(c) = \gamma$$

証明 (定理 2.3.2). $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$) を定める.

$a > 0$ のとき, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ であり, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$a < 0$ のとき, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ であり, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

f は連続であるから, 中間値の定理より $f(c) = 0$ となるような実数 c が存在する.

ゆえに, 三次方程式は少なくとも 1 つの実数解をもつ. □

定理 2.3.2 より, $L \perp M$ の場合は必ず折り線が存在する.

L と M が平行でも垂直でもない場合, M の方程式は $y = cx + d$ ($b \neq ac + d, c \neq 0$) と表せる. ① に代入すると,

$$(cx + d + b)\{c^2x^2 + 2(d - b)cx + (d - b)^2\} + (x^2 - a^2)(cx + d - b) + 2(x - a)^2 = 0$$

これより, x^3 の係数は $c^3 + c$ となることが分かる. $c \neq 0$ より, この方程式は三次方程式になる. ゆえに, L と M が平行でない場合も必ず折り線が存在する.

$L \parallel M$ の場合, M の方程式は $y = d$ ($b \neq d$) と表せる. ① に代入すると,

$$(2 - b + d)x^2 - 4ax + (b - d)(a^2 + b^2 - d^2) + 2a^2 = 0$$

$2 - b + d \neq 0$ の場合, この方程式は二次方程式となる. 判別式を D とすると,

$$D/4 = (b - d)^2\{a^2 + (b - 1)^2 - (d + 1)^2\}$$

と求まる. $(b - d)^2 > 0$ より, $a^2 + (b - 1)^2 - (d + 1)^2$ の符号を調べればよい. ところで, p と q の距離 $d(p, q)$, L と M の距離 $d(L, M)$ を考えると,

$$d(p, q)^2 = a^2 + (b - 1)^2$$

$$d(L, M)^2 = (d + 1)^2$$

ゆえに, $d(p, q) \geq d(L, M)$ であれば実数解を持ち, $d(p, q) < d(L, M)$ であれば実数解を持たない.

$2 - b + d = 0$ の場合, これは図形的に p から L への法線ベクトルと q から M への法線ベクトルが一致することを意味する.

この時, 方程式は

$$-4ax + (b - d)(a^2 + b^2 - d^2) + 2a^2 = 0$$

$b - d = 2$ より,

$$ax - a^2 - 2b + 2 = 0$$

ゆえに, $a = 0$ のとき実数解を持たず, $a \neq 0$ のとき実数解を持つ. またこの時の $d(p, q)$ と $d(L, M)$ の関係を見ると, $a = 0$ の時, $d(p, q) = d(L, M) = |b-1|$ であり, $a \neq 0$ の時, $a^2 > 0$ より $d(p, q) > d(L, M)$ となる.

(1) の結果をまとめると次のようになる:

- L と M が平行でない場合, 1 個以上の折り線が存在する.
- L と M が平行で, $d(p, q) > d(L, M)$ の場合, 1 個以上の折り線が存在する.
- L と M が平行で, $d(p, q) = d(L, M)$ かつ p から L への法線ベクトルと q から M への法線ベクトルが異なる場合, 1 個以上の折り線が存在する.
- L と M が平行で, $d(p, q) = d(L, M)$ かつ p から L への法線ベクトルと q から M への法線ベクトルが等しい場合, 折り線は存在しない.
- L と M が平行で, $d(p, q) < d(L, M)$ の場合, 折り線は存在しない.

(2) この時の折り方は, $(\mathcal{O}_2)$ か $(\mathcal{O}_3)$ の 2 通りとなる. この条件を先ほどの座標系にあてはめると, $q(a, -1)$ となる.

$L \perp M$ の場合, M の方程式は $x = 0$ と表せる. ① に代入すると,

$$(y-1)(y-a+1)(y+a+1) = 0$$

となり, $y = 1, a-1, -a-1$ が求まる.

$y = 1$ のとき, q' は $(0, 1)$ となり p に一致する. すなわちこれは, $(\mathcal{O}_2)$ に対応している.

$y = a-1, -a-1$ の時, q' は $(0, a-1)$ または $(0, -a-1)$ となる. L と M の交点が $(0, -1)$ であることを考えると, これは $(\mathcal{O}_3)$ に対応している.

L と M が垂直でない場合, M の方程式は $y = cx + 1$ と表せる. ① に代入すると,

$$(c^3 + c)x^3 + 4(c^2 + 1)x^2 - (a^2c + 4a - 4c)x = 0$$

この方程式は必ず $x = 0$ を解にもつが, これは $(\mathcal{O}_2)$ に対応している.

$c = 0$ の時 (すなわち $L \parallel M$), $x = a$ も解になる. $q'(a, 1)$ となるので, これは $(\mathcal{O}_3)$ に対応している.

$c \neq 0$ の時, 解の公式を用いて

$$x = \frac{-2(c^2 + 1) \pm (ac + 2)\sqrt{c^2 + 1}}{c^3 + c}$$

条件より $ac + 2 \neq 0$ であるから, 常に 2 つの実数解を持つ. ところで L と M の交点は, $y = -1$ と $y = cx + 1$ を連立させて $\left(-\frac{2}{c}, -1\right)$ と求まる. q と q' はこの交点から等距離 $\left|\frac{a+2}{c}\right|$ にあることから, これは $(\mathcal{O}_3)$ に対応していることが分かる.

以上より, (2) の場合は必ず 1 個以上の折り線が存在する.

(3) この時 q は $(a, -1)$ で表される. ゆえに (1) における q の y 座標 b を -1 にして, (1) と同様の結果を得る.

(4) この時 ① と M の交点の 1 つが q となってしまうため, 交点を数える方法が使えない. そこで $F(p) \leftrightarrow L$ を満たす折り線 F が, p を焦点, L を準線とする放物線 N の接線になることに注目し, 接線の本数を考えていく. 今 q は M 上にあるので, $F(Q) \leftrightarrow M$ で構成される折り線 F は n の接線であり, $F(q) \leftrightarrow q$ または $F(M) \leftrightarrow M$ を満たす. すなわち, この場合の折り方は $(\mathcal{O}_5)$ または $(\mathcal{O}_7)$ に対応している.

$F(q) \leftrightarrow q$ を満たす接線 F が存在しない条件を求めよう. これは, q が N の内側にある場合であるが, 放物線が焦点と準線から距離の等しい点の集合であることを考えれば, $d(p, q) < d(q, L)$ と表すことができる. 一方, $F(M) \leftrightarrow M$ を満たす接線 F が存在しない条件は, $L \parallel M$ である.

以上をまとめると, (4) の結果は次のようになる:

- L と M が平行でない時, 1 個以上の折り線が存在する.
- L と M が平行である時, $d(p, q) \geq d(q, L)$ ならば 1 個以上の折り線が存在する.
- L と M が平行である時, $d(p, q) < d(q, L)$ ならば折り線は存在しない.

(5) この時 $F(p) \leftrightarrow L$ かつ $F(q) \leftrightarrow M$ を満たす折り線 F は,

(ア) $F(p) \leftrightarrow p \wedge F(q) \leftrightarrow q$

(イ) $F(M) \leftrightarrow M \wedge F(p) \leftrightarrow p$

(ウ) $F(L) \leftrightarrow L \wedge F(q) \leftrightarrow q$

(エ) $F(L) \leftrightarrow L \wedge F(M) \leftrightarrow M$

のいずれかを満たす.

(ア) の場合は $(\mathcal{O}_1)$, (イ),(ウ) の場合は $(\mathcal{O}_4)$ に対応している. これらは折り線を 1 個以上存在するのに対し, (エ) の場合は L と M が平行ならば無数に折り線が存在し, 平行でないならば折り線が存在しない.

結論として, 2 直線 L, M が平行でなければ常に 1 個以上の折り線が存在することが示された.

3 折り紙作図

本章では第2章で論じた「一回折りの定理」を作図法として捉え直し、その作図可能性について考える。ところで、作図と言われると次のようなコンパスと定規による作図（以下、ユークリッド作図法という）が知られている。

- (1) 異なる2点が与えられているとき、これらを通る直線を引く。
- (2) 異なる2点が与えられているとき、一方を中心とし他方を通る円を描く。
- (3) 平行でない2直線が与えられているとき、その交点を得る。
- (4) 1つの円と1つの直線が与えられているとき、その高々2つの交点を得る。
- (5) 異なる2つの円が与えられているとき、その高々2つの交点を得る。

本論文では作図法的一种として上記のユークリッド作図法とこれから述べる折り紙作図法が存在するものとして論じる。そのために、まずは作図法とは何かということを明らかにし、体の拡大理論を用いて作図可能性を考える。また、ユークリッド作図法よりも折り紙作図法の方がある意味で優れているということについて、「立方根」および「任意の角の三等分線」が折り紙作図法でのみ作図可能であることを用いて示す。

3.1 序論

本章で扱う「体」の理論を考えるための基礎的な知識について、この節でまとめる。

定義 3.1.1 (複素数上の体). $K \subset \mathbb{C}$ ($\exists a \in K$ s.t. $a \neq 0$) とする. 任意の元 $\alpha, \beta \in K$ について次の (K1), (K2), (K3) を満たす K を体という.

$$(K1) \quad \alpha + \beta \in K$$

$$(K2) \quad \alpha\beta \in K$$

$$(K3) \quad \alpha/\beta \in K \quad (\beta \neq 0)$$

ただし、演算は全て複素数上で自然に定義されるものとして扱う。

注意 . 本論文では複素数上の体のみ取り扱う。一般的に、体とは乗法群かつ可換環なもののことをいう。

定義 3.1.2. K, L : 体 とする. $K \subset L$ のとき, K は L の部分体, または L は K の拡大体という. 特に, $K \subset M \subset L$ となる体 M があるとき, M を K と L の中間体という.

命題 3.1.3. 有理数体 $\mathbb{Q}$ は複素数体 $\mathbb{C}$ の部分体で最小の体である. すなわち, $\forall K$: 体, $\mathbb{Q} \subset K$ である.

証明 . K を体とする. K から 0 でない元 a をとる. 体の定義から, $a/a = 1 \in K$ かつ $a - a = 0 \in K$ である. これより、全ての整数は K に含まれることが分かる. 任意の整数 m, n ($n \neq 0$) について、体の定義から, $m/n \in K$ である. ゆえに, K は全ての有理数を含む. $\square$

以下は、「多項式」に関連する知識についてまとめたものである。

定義 3.1.4 (多項式). x : 変数, $a_0, a_1, \dots, a_n \in K$ (K : 体) とする. これらについての多項式 $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ を定める. この $f(x)$ を K 係数 n 次多項式という. n を具体的に定めないとき, 単に K 係数多項式という. 特に, 恒等的に 0 となる多項式 0 も考えることができる. これを零多項式という. また, $f(x)$ の項の数 n を $f(x)$ の次数といい, $\deg(f(x)) = n$ と表す. 特に, $\deg(0) = -\infty$ と定める.

定義 3.1.5 (代数的な数). $\alpha \in \mathbb{C}$, $f(x) : K$ 係数多項式 とする. $f(\alpha) = 0$ となる時, α を $f(x)$ の根という. また, α のように, ある K 係数多項式の根となる数のことを K 上代数的な数という.

定義 3.1.6 (互いに素). $f_1(x), f_2(x), g(x) : K$ 係数多項式 とする. (ただし, $g(x) \neq 0$ (零多項式ではない) とする.) $f_1(x) = h(x)g(x)$ を満たすような K 係数多項式 $h(x)$ が存在する時, $g(x)$ は $f_1(x)$ を割るといい, $g(x)|f_1(x)$ と表す. また, $g(x)$ が $f_1(x), f_2(x)$ の両方を割る時, $g(x)$ は $f_1(x)$ と $f_2(x)$ の公約元であるという. $f_1(x)$ と $f_2(x)$ の公約元が定数だけである時, $f_1(x)$ と $f_2(x)$ は互いに素という.

定義 3.1.7 (既約). $f(x) : K$ 係数多項式 とする. 2つの K 係数多項式 $g(x), h(x)$ を使って $f(x) = g(x)h(x)$ と表せる時, $g(x)$ と $h(x)$ のどちらかが必ず定数となるならば, $f(x)$ は既約であるという.

定義 3.1.8 (最小多項式). $f(x) : \alpha$ を根に持つ零多項式でない K 係数多項式とする. 次の (1), (2) を満たす時, $f(x)$ は K における α の最小多項式であるという.

- (1) $\forall g(x) : \alpha$ を根に持つ $f(x)$ でない K 係数多項式 に対して, $\deg(f(x)) < \deg(g(x))$
- (2) $f(x)$ の最高次の係数は 1 である.

特に (2) を満たすような $f(x)$ のことをモニックであるという.

定理 3.1.9 (剰余定理). $K : \text{体}$, $f(x), g(x) : K$ 係数多項式 とする, (ただし, $f(x) \neq 0$ とする.) この時, $\exists! q(x), r(x) : K$ 係数多項式 s.t. $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ ($r(x) = 0$ または $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$) が成り立つ.

証明. $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ ($a_0 \neq 0, a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m \in K$) とする. まず, 題意を満たす $q(x), r(x)$ が存在することを示す.

$n < m$ の時, $q(x) = 0$, $r(x) = f(x)$ とすれば題意を満たす.

$n \geq m$ の時, $f_1(x) = f(x) - a_nb_m^{-1}x^{n-m}g(x)$ を考える. $f_1(x)$ は $n-1$ 次以下の K 係数多項式になるの
で, $f_1(x) = a'_0 + a'_1x + \cdots + a'_{n_1}x^{n_1}$ ($a'_0, \dots, a'_{n_1} \neq 0 \in K$, $n_1 = \deg(f_1(x)) \leq n-1$) と表せる. もし, $\deg(f_1(x)) < m$ となるならば, $q(x) = a_nb_m^{-1}x^{n-m}$, $r(x) = f_1(x)$ として題意を満たす. $\deg(f_1(x)) \geq m$ であるならば, $f_2(x) = f_1(x) - a'_{n_1}b_m^{-1}x^{n_1-m}g(x)$ を考える. もし, $\deg(f_2(x)) < m$ となるならば, $q'(x) = a'_{n_1}b_m^{-1}x^{n_1-m}$, $r'(x) = f_2(x)$ として $f_1(x) = g(x)q'(x) + r'(x)$ ($\deg(r'(x)) < \deg(g(x))$) が成り立つ. $f(x) = f_1(x) + a_nb_m^{-1}x^{n-m}g(x)$ より, $f(x) = g(x)\{q'(x) + a_nb_m^{-1}x^{n-m}\} + r'(x)$ となる. ゆえに $q(x) = q'(x) + a_nb_m^{-1}x^{n-m}$, $r(x) = r'(x)$ として題意を満たす. $\deg(f_2(x)) \geq m$ となるならば, 同様に $f_3(x)$ を考える. これを次数が m 未満になるまで繰り返せば, 上のように定理の形を導くことができる.

次に, $q(x), r(x)$ が一意に定まることを示す.

もし, $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ ($r(x) = 0$ または $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$) が成り立っていて, $q(x) \neq s(x)$ なる $s(x)$ を用いて $f(x) = g(x)s(x) + t(x)$ ($t(x) = 0$ または $\deg(t(x)) < \deg(g(x))$) とできるとすると, $g(x)q(x) + r(x) = g(x)s(x) + t(x)$ であり, $g(x)\{s(x) - q(x)\} = r(x) - t(x)$ となる. ところが, これは $\deg(r(x) - t(x)) \leq \max\{\deg(r(x)), \deg(t(x))\} < \deg(g(x)) \leq \deg(g(x)) + \deg(s(x) - q(x)) = \deg(g(x)(s(x) - q(x)))$ と矛盾する. ゆえに $q(x) = s(x)$ であり, $0 = r(x) - t(x)$ となるから, $r(x) = t(x)$ である. $\square$

系 3.1.10 (ユークリッド互除法). $K : \text{体}$, $f(x), g(x) : K$ 係数多項式 とする.(ただし, $g(x) \neq 0$ とする.) 定理 3.1.9 より, 次のような操作を考えることができる:

$$(\text{第 1 式}) \quad f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x) \quad (\deg(r_1(x)) < \deg(g(x)))$$

$$(\text{第 2 式}) \quad g(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x) \quad (\deg(r_2(x)) < \deg(r_1(x)))$$

$$(\text{第 3 式}) \quad r_1(x) = r_2(x)q_3(x) + r_3(x) \quad (\deg(r_3(x)) < \deg(r_2(x)))$$

.....

この操作を $r_k(x) \neq 0$ かつ $r_{k+1}(x) = 0$ となる第 $k+1$ 式が現れるまで繰り返す. この時, $r_k(x)$ は $f(x)$ と $g(x)$ の最大公約元である.

証明 . $r_{k-1}(x) = r_k(x)q_{k+1}(x) + r_{k+1}(x) = r_k(x)q_{k+1}(x)$ より, $r_k(x)|r_{k-1}(x)$ である. また, $r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x)q_k(x) + r_k(x) = r_k(x)\{q_{k+1}(x)q_k(x) + 1\}$ より, $r_k(x)|r_{k-2}(x)$ である. 以下同様にして, $r_k(x)|r_{k-3}(x), \dots, r_k(x)|r_1(x), r_k(x)|g(x), r_k(x)|f(x)$ が成り立つ. ゆえに, $r_k(x)$ は $f(x)$ と $g(x)$ の公約元である.

逆に, $d(x)$ を $f(x)$ と $g(x)$ の公約元とする. $r_1(x) = f(x) - g(x)q_1(x)$ より, $r_1(x)$ は $d(x)$ を因子にもつ. ゆえに $d(x)|r_1(x)$ である. また, $r_2(x) = g(x) - r_1(x)q_2(x)$ より, $r_2(x)$ は $d(x)$ を因数にもつ. ゆえに $d(x)|r_2(x)$ である. 以下同様にして, $d(x)|r_3(x), \dots, d(x)|r_k(x)$ が成り立つ. すなわち, $d(x) > r_k(x)$ なる公約元 $d(x)$ は存在しない. 以上より, $r_k(x)$ は $f(x)$ と $g(x)$ の最大公約元である. $\square$

定理 3.1.11. K : 体, $f(x), g(x): K$ 係数多項式 とする. 次の成り立つ:

$f(x)$ と $g(x)$ は互いに素 $\Leftrightarrow \exists a(x), b(x): 0 \neq a(x), b(x): 0$ でない K 係数多項式 s.t. $f(x)a(x) + g(x)b(x) = 1$

これを示すために, 次の代数学の基本定理と補題 3.1.13 を準備する. 代数学の基本定理はガウスによって示された有名定理である. 証明は省く.

補題 3.1.12 (代数学の基本定理). 次数 1 以上の $\mathbb{C}$ 係数多項式には必ず, 根となるような複素数 α が存在する.

補題 3.1.13. 系 3.1.10 における $r_1(x), r_2(x), \dots, r_k(x)$ について次の成り立つ:

$\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}, \exists a_i(x), b_i(x): 0 \neq a_i(x), b_i(x): 0$ でない K 係数多項式 s.t. $f(x)a_i(x) + g(x)b_i(x) = r_i(x)$

証明 . 第 1 式から $r_1(x) = f(x) - g(x)q_1(x)$ より, $a_1(x) = 1, b_1(x) = -q_1(x)$ として成り立つ.

また第 2 式に $r_1(x) = f(x) - g(x)q_1(x)$ を代入して整理すると, $r_2(x) = -q_2(x)f(x) + \{1 + q_1(x)q_2(x)\}g(x)$ より, $a_2(x) = -q_2(x), b_2(x) = 1 + q_1(x)q_2(x)$ として成り立つ.

さらに第 3 式に $r_1(x) = a_1(x)f(x) + b_1(x)g(x), r_2(x) = a_2(x)f(x) + b_2(x)g(x)$ を代入して整理すれば, $r_3(x) = a_3(x)f(x) + b_3(x)g(x)$ なる $a_3(x)$ と $b_3(x)$ を同様にして求められる.

第 i 式 ($i \geq 3$) においても, $r_{i-2} = a_{i-2}(x)f(x) + b_{i-2}(x)g(x), r_{i-1}(x) = a_{i-1}(x)f(x) + b_{i-1}(x)g(x)$ が成り立っていることに注意すれば, 同様にして $a_i(x), b_i(x)$ を求めることができる. $\square$

証明 (定理 3.1.11). $(\Rightarrow)$ $f(x)$ と $g(x)$ は互いに素であることから, $f(x)$ と $g(x)$ の最大公約元は 1 である.

系 3.1.10 より, ユークリッド互除法を用いて $r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x)q_k + 1$ なる第 k 式を作ることができる. 補題 3.1.13 より, $f(x)a_k(x) + g(x)b_k(x) = r_k(x) = 1$ なる $a_k(x), b_k(x)$ が存在する.

$(\Leftarrow)$ $f(x)$ と $g(x)$ が互いに素でないとする. すなわち, $f(x) = p(x)f'(x), g(x) = p(x)g'(x)$ となるような共通因子 $p(x)$ が存在する. 条件より, $f(x)a(x) + g(x)b(x) = p(x)f'(x)a(x) + p(x)g'(x)b(x) = 1$ である. ところが, $p(x)$ は複素数上の多項式であるから, 代数学の基本定理より, ある複素数 α を解に持つ. ゆえに $p(x)$ の根を α として式に代入すると, $0 = 1$ となって矛盾する. よって $f(x)$ と $g(x)$ は互いに素でなければならない. $\square$

以下は, 「ベクトル空間」及び「行列」に関する知識についてまとめたものである.

定義 3.1.14 (ベクトル空間). K : 体, V : 集合 とする. $\forall x, y \in V, \forall \alpha \in K$ に対して, 次の 2 つの演算

(+) $x + y \in V$ (ベクトル和)

(*) $\alpha * x \in V$ (スカラー倍)

が定まっているとする. これが次の (V1) から (V8) を満たす時, V を K 上の (または $(V, K, +, *)$ のことを) ベクトル空間という.

(V1) $\forall x, y, z \in V, (x + y) + z = x + (y + z)$ (ベクトル和の結合則)

(V2) $\forall x, y \in V, x + y = y + x$ (ベクトル和の交換則)

(V3) $\exists 0 \in V$ s.t. $\forall x \in V, x + 0 = x$ (ベクトル和の単位元)

(V4) $\forall x \in V, \exists -x \in V$ s.t. $x + (-x) = 0$ (ベクトル和の逆元)

(V5) $\forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in V, (\alpha\beta) * x = \alpha * (\beta * x)$ (スカラー倍と積の結合則)

(V6) $\forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in V, (\alpha + \beta) * x = \alpha * x + \beta * x$ (ベクトルの分配則)

(V7) $\forall \alpha \in K, \forall x, y \in V, \alpha * (x + y) = \alpha * x + \alpha * y$ (スカラーの分配則)

(V8) $\forall x \in V, 1 * x = x$ (スカラー倍と積の単位元の一致)

また, V が K 上のベクトル空間である時, V の元をベクトル, K の元をスカラーという.

定義 3.1.15 (一次独立). $V : K$ 上のベクトル空間とする. $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ について, $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ が成り立つ時, $x_1, x_2, \dots, x_n$ は K 上一次独立であるという.

定義 3.1.16 (基底). $V : K$ 上のベクトル空間とする,

$x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ が, $\forall x \in V, \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ s.t. $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$ を満たす時, $x_1, x_2, \dots, x_n$ は V を生成するといひ, $V = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ と表す.

特に, $x_1, x_2, \dots, x_n$ が K 上一次独立である時, これを V の K 上の基底という.

定義 3.1.17 (行基本変形). 行列に対し, 次のような操作を考える.

- (1) 2つの行を入れ替える.
- (2) ある行に0でない複素数をかける.
- (3) ある行に他の行の複素数倍を加える.

これらの操作をまとめて行基本変形という.

行基本変形により, $m \times n$ 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ を $A' = \begin{pmatrix} I_r & O_{r, n-r} \\ O_{m-r, r} & O_{m-r, n-r} \end{pmatrix}$ と変形できる. (

ただし, I_r は r 次単位行列, $O_{i,j}$ は $i \times j$ 零行列を表す.) この時, r を行列 A の階数といひ, $\text{rank} A$ と表す.

定義 3.1.18 (解の自由度). 連立1次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

をおく. この時, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ を係数行列といひ, $(A, b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ を拡大係数行列という.

$$(A, b) \text{ は行基本変形により, } (A', b') = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \alpha_{1r+1} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & 1 & \alpha_{rr+1} & \cdots & \alpha_{rn} & \beta_r \\ & & & & & & \beta_{r+1} \\ & O_{m-r,r} & & & O_{n-r,m-r} & & \vdots \\ & & & & & & \beta_n \end{pmatrix} \text{ と変形できる.}$$

これを書き直せば,

$$\begin{cases} x_1 + \alpha_{1r+1}x_{r+1} + \cdots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \vdots \\ x_r + \alpha_{rr+1}x_{r+1} + \cdots + \alpha_{rn}x_n = \beta_r \\ \phantom{x_r + \alpha_{rr+1}x_{r+1} + \cdots + \alpha_{rn}x_n = \beta_r} 0 = \beta_{r+1} \\ \phantom{x_r + \alpha_{rr+1}x_{r+1} + \cdots + \alpha_{rn}x_n = \beta_r} \vdots \\ \phantom{x_r + \alpha_{rr+1}x_{r+1} + \cdots + \alpha_{rn}x_n = \beta_r} 0 = \beta_m \end{cases} \dots\dots\dots ③$$

となり, これは ⑤ と同じ解を持つ. さらに, ③ を変形すると,

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 - (\alpha_{1r+1}x_{r+1} + \cdots + \alpha_{1n}x_n) \\ \vdots \\ x_r = \beta_r - (\alpha_{rr+1}x_{r+1} + \cdots + \alpha_{rn}x_n) \\ 0 = \beta_{r+1} \\ \vdots \\ 0 = \beta_m \end{cases} \dots\dots\dots ④$$

ゆえに, $\beta_{r+1} = \cdots = \beta_m = 0$ が成り立つ場合のみ解を持つ. (すなわち, $\text{rank} A = \text{rank}(A, b)$ の時, 解を持つ.)

ここで, 任意の定数 $k_{r+1}, \dots, k_n$ を用いて, $x_{r+1} = k_{r+1}, \dots, x_n = k_n$ とおく. この時, この連立方程式の一般解は,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + k_{r+1} \begin{pmatrix} -\alpha_{1r+1} \\ \vdots \\ -\alpha_{rr+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + k_n \begin{pmatrix} -\alpha_{1n} \\ \vdots \\ -\alpha_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表される. すなわち, n 個の未知数のうち $n - r$ 個の未知数 $x_{r+1}, \dots, x_n$ は自由に定めることができる. この $n - r$ を解の自由度という. $r = \text{rank} A$ であるから, 解の自由度は $n - \text{rank} A$ である.

注意. 定義 3.1.17, 3.1.18 には示すべきことがいくつかある. これらは本筋から外れるため省略する.

定義 3.1.19 (自明な解). 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

(以下, これを $Ax = 0$ と表す.) は $x_1 = \cdots = x_n = 0$ を解に持つ. これを自明な解という. それ以外に解があるとき, その解を非自明な解という.

命題 3.1.20. $A: m \times n$ 行列 とする. $\text{rank} A < n \Rightarrow Ax = 0$ は非自明な解を持つ.

証明 . $(n - \text{rank} A) > 0$ である. すなわち, $Ax = 0$ は解の中に $(n - \text{rank} A)$ 個の任意の定数を持つ. これは非自明な解である. $\square$

系 3.1.21. $A: m \times n$ 行列 とする. $m < n \Rightarrow Ax = 0$ は非自明な解を持つ.

証明 . $\text{rank} A \leq m < n$ より命題 3.1.20 が成り立つ. $\square$

定理 3.1.22. $V: K$ 上のベクトル空間 とする.

$x_1, \dots, x_m$ が V を生成する $\Rightarrow m$ 個より多い V の元の組は一次従属である
(すなわち, 一次独立である V の元の組は m 個以下になる.)

証明 . $y_1, \dots, y_n \in V$ ($n > m$) とおく. $a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n \dots\dots\dots$ ⑤ を考える.

$y_1, \dots, y_n$ は $x_1, \dots, x_m$ の一次結合の形で表される. つまり,

$$\begin{cases} y_1 = p_{11}x_1 + \dots + p_{m1}x_m \\ \vdots \\ y_n = p_{1n}x_1 + \dots + p_{mn}x_m = 0 \end{cases} \dots\dots\dots \text{⑥}$$

とおいてもよい. ここで,

$$\begin{cases} b_1 = p_{11}a_1 + \dots + p_{n1}a_n \\ \vdots \\ b_n = p_{m1}a_1 + \dots + p_{mn}a_n = 0 \end{cases} \dots\dots\dots \text{⑦}$$

とする. 以上のことから, $a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n = b_1 x_1 + \dots + b_m x_m \dots\dots\dots$ ⑧ である.

ここで, $b_1 = \dots = b_n = 0$ とすると, 系 3.1.21 より ⑦ は自明でない解を持つ. そこで, 少なくとも 1 つは 0 でない定数の組 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ を用いて, $a_1 = \alpha_1, \dots, a_n = \alpha_n$ とおく. ⑧ より, $\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n = 0$ である. つまり, $y_1, \dots, y_n$ は一次従属である. $\square$

系 3.1.23. $V: K$ 上のベクトル空間 とする.

$x_1, x_2, \dots, x_m$ と $y_1, y_2, \dots, y_n$ がそれぞれ V の K 上の基底 $\Rightarrow n = m$

証明 . $x_1, x_2, \dots, x_m$ はそれぞれ V の元であるから, V の基底 $y_1, y_2, \dots, y_n$ の一次結合の形で表せる. $x_1, x_2, \dots, x_m$ は一次独立であるから, 定理 3.1.22 より $n \leq m$ である. 同様にして, $m \leq n$ も成り立つ. $\square$

定義 3.1.24 (次元). 系 3.1.23 より, K 上のベクトル空間 V に基底が存在する時, 基底をなすベクトルの個数は取り方に依らず一定である. そこで, 基底をなすベクトルの個数を $\dim_K V$ と表し, V の K 上の次元という.

定義 3.1.25 (1 次変換). $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ($a, b, c, d \in K$) とする. 写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で定めるとき, f を A による 1 次変換という.

命題 3.1.26. A を 2 次正方行列とする. 以下は全て同値である.

- (1) 行列 A が逆行列をもつ.
- (2) A による 1 次変換が逆写像をもつ.
- (3) $\det A \neq 0$

証明 . (1) $\Rightarrow$ (2) A の逆行列を A^{-1} とする.

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \text{ より } A^{-1}f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = A^{-1}A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ゆえに $f^{-1}\left(A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)\right) = A^{-1}\left(A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)\right)$ と定めると, f^{-1} は逆写像になる.

(2) $\Rightarrow$ (3) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ である. ここで, $x' = ax+by$, $y' = cx+dy$ とすると, $dx' - by' = (ad-bc)x$, $-cx' + ay' = (ad-bc)y$ が求まる. ゆえに, $f^{-1}\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ であるならば,

$$x = \frac{d}{ad-bc}x' - \frac{b}{ad-bc}y', \quad y = -\frac{c}{ad-bc}x' + \frac{a}{ad-bc}y'$$

とならなければならない. ゆえに, $ad-bc \neq 0$ となる.

(3) $\Rightarrow$ (1) $A^{-1} = \frac{A}{\det A}$ より成り立つ.

□

定義 3.1.27 (正則行列). 命題 3.1.26 を満たす A を正則行列といい, 正則行列による 1 次変換を正則な 1 次変換という.

3.2 作図論

本論文では作図法とは「ある条件を満たす写像の集合」として定義する. これに基づいた作図論について本節で取り扱う.

定義 3.2.1 (作図法). $A_1, A_2, \dots, A_m$ ($m \in \mathbb{N}$) を図形とする. $F = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ を基本図形集合といい, F の元を基本図形という. また集合 $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) が作図法 $\mathcal{F}$ であるとは, 任意の $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対して $f_i: X_i \rightarrow Y_i$ であることをいう. ただし, $X_i \subset F^{r_i}, Y_i \subset F^{s_i}$ ($r_i, s_i \in \mathbb{N}$) とする. このとき, 作図法に含まれる写像 $f_1, f_2, \dots, f_n$ を作図手順という.

すなわち作図手順とは, ある基本図形の組み合わせから新たな基本図形の組み合わせを指定するものであると考える.

例として, ユークリッド作図法は次のように定められる.

定義 3.2.2. ユークリッド作図法 $\mathcal{E}$ とは, 基本図形集合 $E = \{\emptyset, \text{平面上の点}, \text{直線}, \text{円}\}$ とし, 次の作図手順 $e_1, e_2, \dots, e_5$ からなる集合のことである.

(e_1) $X_1 = \{(P, Q) \mid P \neq Q \in \mathbb{R}^2\}$, $Y_1 = \{l \mid l: \text{直線}\}$ とし, $e_1: X_1 \rightarrow Y_1$ を $e_1((P, Q))$ が P, Q を通る直線になるように定める.

(e_2) $Y_2 = \{c \mid c: \text{円}\}$ とし, $e_2: X_1 \rightarrow Y_2$ を $e_2((P, Q))$ が P を中心として Q を通る円になるように定める.

(e_3) $X_3 = \{(l, m) \mid l \not\parallel m: \text{直線}\}$ とし, $e_3: X_3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $e_3((l, m))$ が l と m の交点になるように定める.

(e_4) $X_4 = \{(l, c) \mid l: \text{直線}, c: \text{円}\}$, $Y_4 = \{(P, Q) \mid P, Q \in \mathbb{R}^2 \cup \{\emptyset\}\}$ とし, $e_4: X_4 \rightarrow Y_4$ を $e_4((l, c))$ が l と c の交点になるように定める. ただし, 交点が存在しない場合は $e_4((l, c)) = (\emptyset, \emptyset)$, 交点が P のみ (1 つのみ) の場合は $e_4((l, c)) = (P, \emptyset)$ と定める.

(e_5) $X_5 = \{(c, d) \mid c, d: \text{円}\}$ とし, $e_5: X_5 \rightarrow Y_4$ を $e_5((c, d))$ が c, d の交点になるように定める. ただし, 交点が存在しない場合は $e_5((c, d)) = (\emptyset, \emptyset)$, 交点が P のみ (1 つのみ) の場合は $e_5((c, d)) = (P, \emptyset)$ と定める.

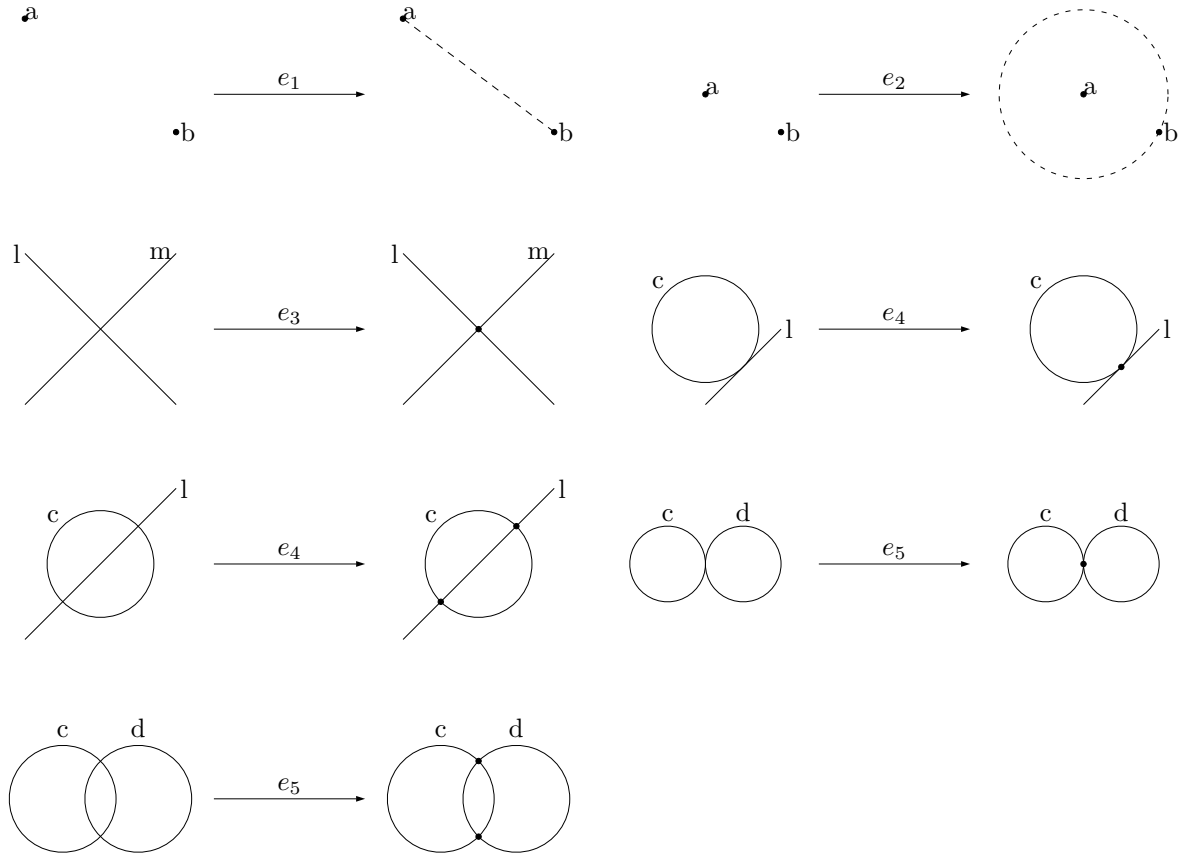


図 4: 作図手順 $e_1, e_2, \dots, e_5$ のイメージ

作図手順のそれぞれのイメージは図 4 のようになる。

作図可能性について考えるとき、その対象は図形である場合と数である場合が存在する。以下は、この 2 つを明確に区別して作図可能性を定義したものである。またこれらの例として、ユークリッド作図法に関する命題を用意した。

定義 3.2.3 (図形の作図可能). $A_1, A_2, \dots, A_m, B_1, B_2, \dots, B_n$ ($m, n \in \mathbb{N}$) を図形とする。

作図法 $\mathcal{F}$ を、 $A_1, A_2, \dots, A_m, B_1, B_2, \dots, B_n$ を含む基本図形集合 F と作図手順 $f_1, f_2, \dots, f_l$ ($l \in \mathbb{N}$) からなるものとして定める。また $B = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ とし、 B から有限回の作図手順の繰り返しによって得られる図形の集合 C_t を次のように表す。

- (1) $C_{1i} = \{\pi_j(f_i(X_i \cap B^{r_i})) \mid 1 \leq j \leq r_i\}$ とし、 $C_1 = C_{11} \cup C_{12} \cup \dots \cup C_{1l}$ とする。ただし π_j は第 j 成分の射影を表す。
- (2) $C_{2i} = \{\pi_j(f_i(X_i \cap C_1^{r_i})) \mid 1 \leq j \leq r_i\}$ とし、 $C_2 = C_{21} \cup C_{22} \cup \dots \cup C_{2l}$ とする。
- (3) 以下同様にして帰納的に C_t ($t \in \mathbb{N}$) を定める。

このとき、 $\exists t_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $C_{t_0} \supset \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ であるならば、 $A_1, A_2, \dots, A_m$ は $B_1, B_2, \dots, B_n$ により $\mathcal{F}$ 作図可能であるという。特に、 B の元が距離 1 離れた 2 点だけであるとき、単に $A_1, A_2, \dots, A_m$ が $\mathcal{F}$ 作図可能であるという。

命題 3.2.4. 点 O と線分 AB が与えられているとする. このとき, O を中心として AB を半径とする円は $\mathcal{E}$ 作図可能である.

証明. (1) 作図手順 e_1 により中心 O で B を通る円及びその逆の円が作図できる. 作図手順 e_5 より, この 2 円の 2 交点を C, D とおく.

(2) 作図手順 e_1 により直線 OB, OC が作図でき, 作図手順 e_3 により交点を E とおく.

(3) 作図手順 e_1 により直線 AE が作図できる. 作図手順 e_2 により中心 E で A を通る円ができる. 作図手順 e_4 によりこの円と直線 AE の A でない交点 F をおく.

(4) 作図手順 e_2 により中心 O で F を通る円ができる. これが求める円である.(図 5) □

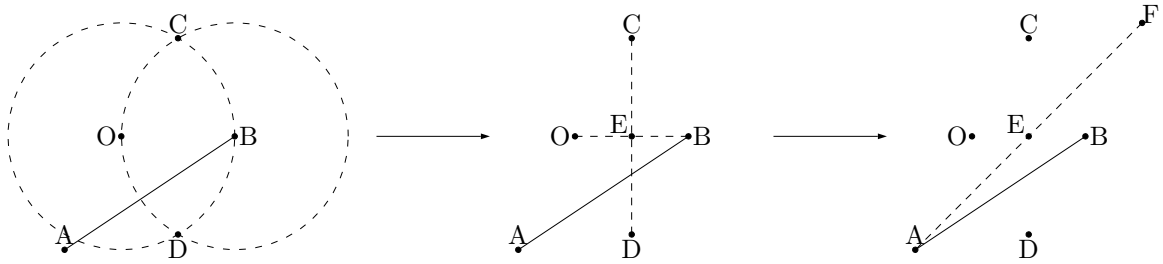


図 5: 命題 3.2.4 の証明図

定義 3.2.5 (数の作図可能). $\mathcal{F}$: 作図法, $F: \{x \mid x \in \mathbb{R}^2\}$ を含む基本図形集合とする. $\alpha \in \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ とし, OP を $|OP| = 1$ の線分とする. この時, $\{P_i \mid P_i \in OP \text{ かつ } |OP_i| \in A\} \cup \{O, P\}$ により 2 点 X, Y ($|XY| = |\alpha|$) が $\mathcal{F}$ 作図可能であるならば, α は A の元から $\mathcal{F}$ 作図可能であるという. 特に, $A = \emptyset$ である時, 単に α が $\mathcal{F}$ 作図可能であるという.

命題 3.2.6. 任意の有理数は $\mathcal{E}$ 作図可能である.

これを示すために, 次の補題を準備する.

補題 3.2.7. 異なる 2 点 A, B が与えられたとき, 点 A を通って直線 AB に垂直な直線は $\mathcal{E}$ 作図可能である.

証明. A を中心とし B を通る円が作図でき, 直線 AB との B でない交点を C とする. C を中心とし B を通る円, B を中心とし C を通る円を使って, 直線 AB の垂直二等分線を作図する. A は B と C の中点であるから, この垂直二等分線は A を通る. □

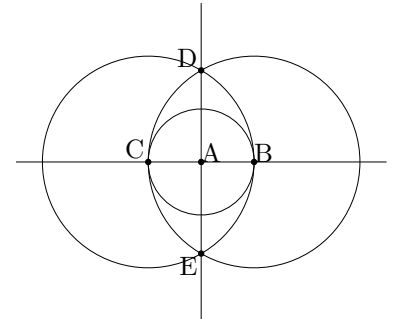


図 6: 垂線の作図

証明 (命題 3.2.6). $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$ により $\{(p, q) \mid p, q \in \mathbb{Q}\}$ が $\mathcal{E}$ 作図可能であることを示せばよい. まず, 格子点が $\mathcal{E}$ 作図可能であることを示す.

- (1) 作図手順 e_2, e_4 を図のように繰り返すことで $\{(z, 0) \mid z \in \mathbb{Z}\}$ が作図できる.

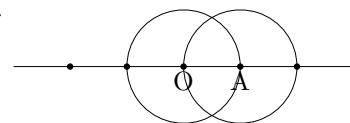


図 7: x 軸上の点の作図

- (2) 補題 3.2.7 より O を通る直線 OA の垂線が作図できる. 作図手順 e_2, e_4 により $(0, 1), (0, -1)$ が作図できる.

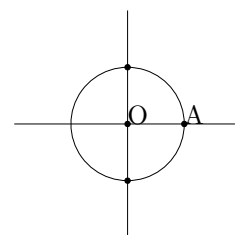


図 8: y 軸上の直線の作図

- (3) (1) と同様にして $\{(0, z) \mid z \in \mathbb{Z}\}$ が作図できる.

- (4) 任意の $(z, 0)$ についても (2), (3), (4) の操作ができる. これにより格子点が作図できる.

次に, 長さ $|1/n|$ ($n \in \mathbb{Z} - \{0\}$) が作図可能であることを示す. O と $(n, 1)$ を通る直線 k が作図できる. この時, k と $x = 1$ の交点を P とすると, $AP = |1/n|$ となる.

命題 3.2.4 により, 線分の移動ができるから, $1/n$ の任意の整数倍も作図できる. ゆえに任意の有理数が作図可能であることが示される. $\square$

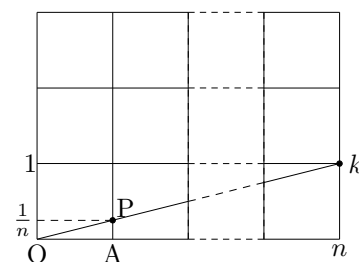


図 9: $\frac{1}{n}$ の作図

最後にユークリッド作図法を考えることで, 定義 2.1.8 の well-defined 性が保証されることを述べておく.

命題 3.2.8. 一直線上にない 3 点 A, B, P が与えられているとする. 点 Q を直線 AB までの距離が P と等しく, 直線 AB と直線 PQ が垂直であるような点とする. このとき, Q は $\mathcal{E}$ 作図可能である.

証明 . 補題 3.2.7 により, P を通る直線 AB の垂線 l が作図できる. 作図手順 e_3 により直線 AB と l の交点 R を得る. 作図手順 e_2 により中心 R で P を通る円 c が作図できる. 作図手順 e_4 より c と l の 2 交点を得るが, 一方は P であることが分かっている. そこでもう一方を Q と定めると, これは題意を満たす点となる. $\square$

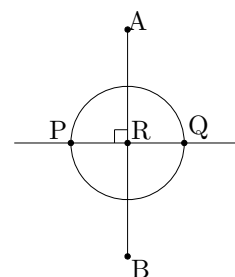


図 10: 鏡映変換の作図

これにより、任意の点について鏡映変換として対応する点が一意に定まることが分かる。また一直線上にある3点 A, B, P についても、 P 自身が鏡映変換の条件を満たす点となる。以上により、鏡映変換が写像となることが保証された。

3.3 体の拡大

ユークリッド作図法についての作図可能性は体の拡大理論を用いることで代数的に考察できることが知られている。本節ではこのことを踏まえ、体の拡大に関する知識を準備する。

定義 3.3.1 (添加). K : 体, $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ とする. K の元と $a_1, a_2, \dots, a_n$ を含む最小の体を $K(a_1, a_2, \dots, a_n)$ と表す. これを K に $a_1, a_2, \dots, a_n$ を添加した体という.

命題 3.3.2. K, L : 体 $\Rightarrow K \cap L$: 体

証明. $x, y \in K \cap L$ とする. $x, y \in K$ より $x \pm y \in K$, $x, y \in L$ より $x \pm y \in L$. ゆえに $x \pm y \in K \cap L$ である. 同様にして, $xy \in K \cap L$, $x/y \in K \cap L$ が成り立つ. $\square$

系 3.3.3. $K(a_1, a_2, \dots, a_n)$ は, K と $a_1, a_2, \dots, a_n$ を含む全ての体の共通部分である.

証明. 命題 3.3.2 より, ある2つの体の共通部分も体であることと添加した体の最小性により示すことができる. $\square$

命題 3.3.4. L を K の拡大体とする. この時, L は K 上のベクトル空間になる.

証明. ベクトル和として複素数上の足し算を, スカラー倍として複素数上の掛け算を定め, これがベクトル空間の定義を満たすことを示す. L は複素数上の体であるから (V1), (V2), (V3), (V4) を満たす. また, $K \subset L$ より K の元は全て L に含まれる. ゆえに (V5), (V6), (V7), (V8) を満たす. $\square$

次の定理は, 拡大体を多項式を用いて構成することで, 添加した体を用いて具体的に体が拡大できるということを示したものである.

定理 3.3.5. K : 体, $\rho \in \mathbb{C}$ を K 上既約な n 次多項式 $f(x)$ の根とする. $L = \{a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \dots + a_{n-1}\rho^{n-1} \mid a_i \in K\}$ と定める. このとき, 以下のことが成り立つ.

(1) L は体であり, $L = K(\rho)$ である.

(2) L は $\{1, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{n-1}\}$ を基底とする K 上の n 次元ベクトル空間である.

証明. (1) L が体であることを示す. L の元 p, q は, それぞれ $p = a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \dots + a_{n-1}\rho^{n-1}$ ($a_i \in K$), $q = b_0 + b_1\rho + b_2\rho^2 + \dots + b_{n-1}\rho^{n-1}$ ($b_i \in K$) と表せる.

(K1) L の元 p, q は, それぞれ $p = a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \dots + a_{n-1}\rho^{n-1}$ ($a_i \in K$), $q = b_0 + b_1\rho + b_2\rho^2 + \dots + b_{n-1}\rho^{n-1}$ ($b_i \in K$) と表せる. ゆえに $p \pm q = a_0 \pm b_0 + (a_1 \pm b_1)\rho + (a_2 \pm b_2)\rho^2 + \dots + (a_{n-1} \pm b_{n-1})\rho^{n-1}$ となり, $p \pm q \in L$ が成り立つ.

(K2) n 次未満の K 係数多項式 $p(x), q(x)$ を考える. 定理 3.1.9 より, $p(x)q(x) = f(x)d(x) + r(x)$ なる K 係数多項式 $d(x), r(x)$ (ただし $r(x)$ は n 次未満) が存在する. この式に $x = \rho$ を代入すると, $f(\rho) = 0$ より, $p(\rho)q(\rho) = r(\rho) \in L$ が成り立つ.

(K3) (K1) で定めた p を用いて, $1/p \in L$ を示す. $p = g(\rho)$ となるような n 次未満の K 係数多項式 $g(x) (\neq 0)$ を考える. $f(x)$ は既約であるから, $f(x)$ と $g(x)$ は互いに素となる. 定理 3.1.11 より, $f(x)h(x) + g(x)k(x) = 1$ となるような K 係数多項式 $h(x), k(x)$ が存在する. $x = \rho$ を代入すると, $g(\rho)k(\rho) = 1$ となり, $k(\rho) = 1/p$ が成り立つ. $k(\rho)$ が L に含まれることは, $k(x)$ を $f(x)$ で割ることを考えると (K2) のように $k(\rho) = r(\rho)$ となることから分かる. 以上のことから (K3) が示される.

$L = K(\rho)$ を示す.

(○) L は K の全ての元と ρ を含む体である. ゆえに $L \supset K(\rho)$ である.

(○) L の元 $p = a_0 + a_1\rho + \cdots + a_{n-1}\rho^{n-1}$ ($a_i \in K$) をとる. $K(\rho)$ は体であるから, K の元と ρ に関する四則演算について閉じている. ところで, p は K の元, 及び K の元と $\rho, \rho^2, \dots, \rho^{n-1}$ のそれぞれの積の和で表されている. ゆえに $p \in K(\rho)$ となり, $L \subset K(\rho)$ が成り立つ.

(2) $\{1, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{n-1}\}$ が K 上一次従属であると仮定すると,

$\exists b_0, b_1, \dots, b_{n-1} \in K$ s.t. $b_0 + b_1\rho + \cdots + b_{n-1}\rho^{n-1} = 0$ かつ $b_i \neq 0$ が成り立つ. この $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ を用いて, 多項式 $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1}$ を考える. $f(x)$ と $g(x)$ は互いに素であるから, 定理 3.1.11 より $f(x)h(x) + g(x)k(x) = 1$ となる多項式 $h(x), k(x)$ が存在する. ところが, $x = \rho$ を代入すると, $0 = 1$ となり矛盾する. ゆえに, $\{1, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{n-1}\}$ は K 上一次独立である. L の定義から, $\{1, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{n-1}\}$ は L を生成しているのだから, 基底の条件を満たす. $\square$

定義 3.3.6 (拡大次数). L を K の拡大体とする. 命題 3.3.4 より L は K 上のベクトル空間となる. この時, $[L : K] = \dim_K L$ を K から L への拡大次数という. $[L : K] = n$ のとき, L は K の n 次拡大という.

以下の 2 つの命題は, 拡大次数についての性質を表したものである.

命題 3.3.7. K : 体, $\alpha \in \mathbb{C}$ とする. $[K(\alpha) : K] = n \Rightarrow \alpha$ は K 上既約な n 次多項式の根である.

証明. $[K(\alpha) : K] = \dim_K K(\alpha) = n$ より, $n+1$ 個の元 $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^n$ は K 上一次従属である. よって, $\exists a_0, a_1, \dots, a_n \in K$ s.t. $a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n = 0$ かつ $a_i \neq 0$ が成り立つ. この $a_0, a_1, \dots, a_n$ を用いて n 次多項式 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ を作る. $f(x)$ は α を根にもち, $f(x) \neq 0$ である. ゆえに, α は K 上次代数的な数となる. ここで, K 上の α の最小多項式を $g(x)$ とおく. $f(x)$ は n 次多項式より, $g(x)$ は n 次以下の多項式である. ところが, $g(x)$ が n 次未満の多項式であるとする, α は n 次未満の多項式の根となる. 定理 3.3.5 より $[K(\alpha) : K] < n$ となるため, 仮定と矛盾する. よって, $g(x)$ は n 次多項式となる. 最小多項式は既約であるから, $g(x)$ は題意を満たす. $\square$

命題 3.3.8. K, M, L : 体, $K \subset M \subset L$ であり, それぞれ有限次拡大とする. この時, $[L : K] = [L : M][M : K]$ が成り立つ.

証明. L の M 上の基底を $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ($m \in \mathbb{N}$), M の K 上の基底を $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ ($n \in \mathbb{N}$) とする. $[L : M] = m$, $[M : K] = n$ である.

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ は L を生成するから, L の元 a は $a = \sum_{i=1}^m b_i \alpha_i$ ($b_i \in M$) とかける. $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ は M を生成するから, M の元 b_i は $b_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} \beta_j$ ($b_{ij} \in K$) とかける. これより $a = \sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^n b_{ij} \beta_j) \alpha_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij} \alpha_i \beta_j$ となり, L の元が K の元を係数とする $\alpha_i \beta_j$ の一次結合でかけることが分かる. 0 は L に含まれるので, $0 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij} \alpha_i \beta_j$ とかける. $\sum_{j=1}^n b_{ij} \beta_j \in M$ かつ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ は M 上一次独立より, $\sum_{j=1}^n b_{ij} \beta_j = 0$ である. 同様に, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ は K 上一次独立より, $b_{ij} = 0$ である. ゆえに, $\alpha_1 \beta_1, \alpha_2 \beta_1, \dots, \alpha_m \beta_1, \alpha_1 \beta_2, \dots, \alpha_m \beta_n$ は K 上で L を生成していて, 一次独立である. よってこれは K 上の L の基底となり, $[L : K] = \dim_K L = mn = [L : M][M : K]$ が成り立つ. $\square$

系 3.3.9. K : 体, $L : K$ の有限次拡大とする. この時, $L = K(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}$)

証明. $[L : K] = n$ として, 数学的帰納法により示す.

(1) $n = 1$ のとき, $[L : K] = 1 \Leftrightarrow L = K$ より題意を満たす.

(2) $n > 1$ として, $[L : K] < n$ のとき, 題意を満たすと仮定する. この時, K に含まれない L の元 α_1 が存在する. これを用いて $K_1 = K(\alpha_1)$ とおく. もし, $L = K_1$ ならば $L = K(\alpha_1)$ となり題意を満たす. $L \neq K_1$ ならば $K \subset K_1 \subset L$ であるから, 命題 3.3.8 より $[L : K] = [L : K_1][K_1 : K]$ が成り立つ. $[L : K] = n$, $[K_1 : K] > 1$ より, $[L : K_1] < n$ である. 仮定より, $L = K_1(\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ と表すことができる. $L = K(\alpha_1)(\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) = K(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ が成り立つ. $\square$

3.4 ユークリッド作図可能性

以上の議論を基に, まずはユークリッド作図可能性について考える. 結論から述べると, ある数がユークリッド作図可能であるかどうかは, ある条件を満たしながら拡大していく体の列を作れるかどうかということと同義である. 実際にこのことを述べたものが, 次のユークリッド作図可能定理である.

定理 3.4.1 ($\mathcal{E}$ 作図可能定理). $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $K_0 = \mathbb{Q}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ とすると, 以下が成り立つ.

$\alpha \in \mathbb{R}$ が $a_1, a_2, \dots, a_n$ から $\mathcal{E}$ 作図可能 $\Leftrightarrow$ ある体の列 $K_1, K_2, \dots, K_n$ が次を満たす.

(1) $K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n \subset \mathbb{R}$

(2) $[K_i : K_{i-1}] = 2$ ($1 \leq i \leq n$)

(3) $\alpha \in K_n$

以下, 和田 [2] による方法に則り定理を証明する.

補題 3.4.2. $\alpha, \beta (\neq 0) \in \mathbb{R}$ とする. このとき, $\alpha \pm \beta, \alpha\beta, \alpha/\beta$ は α, β から $\mathcal{E}$ 作図可能である. すなわち, $\mathcal{E}$ 作図可能な数の集合は体となる.

証明. $\alpha \pm \beta$ が $\mathcal{E}$ 作図可能であることを示す.

$OA = |\alpha|$, $OB = |\beta|$ とする. この時, $|\alpha| < |\beta|$ として, 命題 3.2.4 から O, A, B がこの順に一直線上にあるとして考えても良い. O を中心とし, $|\alpha|$ を半径とする円を作図する. すると, 直線 OA 上に A でない交点 A' が取れる. $OA' = |\alpha|$, $OB = |\beta|$ より, $A'B = |\alpha| + |\beta|$ である. また, $AB = |\beta| - |\alpha|$ である. α と β の正負で場合分けをすれば, この 2 つの式から $|\alpha \pm \beta|$ が得られる (図 11). $|\alpha| \geq |\beta|$ に関しても同様に示される.

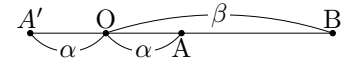


図 11: $\alpha \pm \beta$

$\alpha\beta$ が $\mathcal{E}$ 作図可能であることを示す.

$OP = 1$, $OA = |\alpha|$, $OB = |\beta|$ とする. O, P, A が一直線上にあるとして考えて良い. この時, $BP \parallel CA$ となるように直線 OB 上の点 C を取ることができる. $\triangle OBP \sim \triangle OCA$ より, $OB : OC = OP : OA \Leftrightarrow |\beta| : OC = 1 : |\alpha|$ となり, $OC = |\alpha\beta|$ が求まる (図 12).

α/β が $\mathcal{E}$ 作図可能であることを示す.

図 12 において $OB = 1$, $OA = |\alpha|$, $OC = |\beta|$ と置き直す. すると, 同様の議論から $OB : OC = OP : OA \Leftrightarrow 1 : |\beta| = OP : |\alpha|$ となり, $OP = |\alpha/\beta|$ が求まる. $\square$

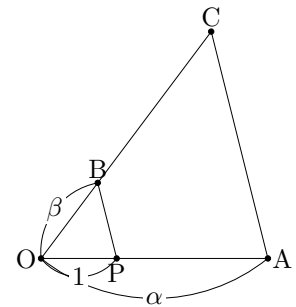


図 12: $\alpha\beta$

補題 3.4.3. $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ から $\sqrt{\alpha}$ は $\mathcal{E}$ 作図可能である.

証明． $OP = 1$, $OA = \alpha$ とする． O, P, A が一直線上にあるとして考えて良い．

- (1) 垂直二等分線の作図により, PA の中点 M を取ることができる．
- (2) 中心 M , 半径 $PM(=MA)$ の半円が作図できる．
- (3) 垂線の作図により, O を通り PA に垂直な直線が作図できる．

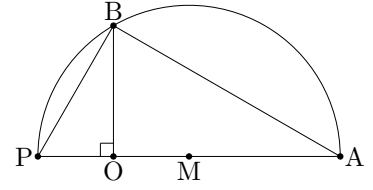


図 13: $\sqrt{\alpha}$

この時, (2) と (3) の交点を B とする． $\triangle BOP \sim \triangle AOB$ より, $OA : OB = OB : OP \Leftrightarrow \alpha : OB = OB : 1$ となり, $OB = \sqrt{\alpha}$ が求まる．(図 13) $\square$

補題 3.4.4. $K \subset L (\subset \mathbb{R})$: 体とする．このとき, 以下が成り立つ．

$$[L : K] = 2 \Rightarrow \exists \rho \in L \text{ s.t. } \rho^2 \in K \text{ かつ } \rho \notin K \text{ かつ } L = K(\rho)$$

証明． K, L : 体, $K \subset L \subset \mathbb{R}$, $[L : K] = 2$ とする． K 上の L の基底として $\{1, x\}$ をとる．($x \in L \setminus K$ である．) この時, $x^2 = a + bx$ ($a, b \in K$) と表せる．これを解くと,

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4a}}{2}$$

ただし, $x \in \mathbb{R}$ より $b^2 + 4a \geq 0$ である．ここで, $c = \frac{b}{2}$, $\alpha = \frac{b^2 + 4a}{4}$ とする．この時, $\{1, c + \sqrt{\alpha}\}$ は L の基底である． $c \in K$ であるから, $\{1, \sqrt{\alpha}\}$ も L の基底となる．定理 3.3.5 より, $L = K(\sqrt{\alpha})$ である． $\sqrt{\alpha} \notin K$ かつ $\sqrt{\alpha}^2 \in K$ であることに注意すれば, $\sqrt{\alpha}$ が題意を満たすことが分かる． $\square$

補題 3.4.5. 体 K の元が全て $\mathcal{E}$ 作図可能 $\Rightarrow K$ の 2 次拡大の元 (ただし $\mathbb{R}$ に含まれるものとする.) も $\mathcal{E}$ 作図可能

証明．補題 3.4.4 より, K の 2 次拡大体は適当な K の元 α を用いて $K(\sqrt{\alpha})$ と書ける．また, $K(\sqrt{\alpha})$ の任意の元は $a + b\sqrt{\alpha}$ ($a, b \in K$) と表せる．補題 3.4.2, 3.4.3 より, $a + b\sqrt{\alpha}$ は $\mathcal{E}$ 作図可能である．すなわち, $K(\sqrt{\alpha})$ の任意の元は $\mathcal{E}$ 作図可能である． $\square$

これらを用いてまず, 定理の十分性を示す．

証明 (定理 3.4.1($\Leftarrow$)). $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $K_0 = \mathbb{Q}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ として, 条件を満たす体の列 $K_0, K_1, \dots, K_n$ があるとする． K_0 の元が全て $a_1, \dots, a_n$ から $\mathcal{E}$ 作図可能であることを示す． K_0 の元は有理数または $a_1, \dots, a_n$ についての四則演算と有理数倍で表される．命題 3.2.6 より, 距離 1 離れた 2 点により有理数が作図可能である．補題 3.4.2 より, 与えられた数に関する四則演算は $\mathcal{E}$ 作図可能である．このようにしてできる $\mathcal{E}$ 作図可能な数の四則演算もまた $\mathcal{E}$ 作図可能である．ゆえに, K_0 の元が全て $\mathcal{E}$ 作図可能であることが示される．このことにより, 補題 3.4.4 が成り立つから, K_1 の元は全て $\mathcal{E}$ 作図可能である．同様にして, $K_2, \dots, K_n$ が $\mathcal{E}$ 作図可能も示される．よって $\alpha \in K_n$ は $a_1, \dots, a_n$ により $\mathcal{E}$ 作図可能である． $\square$

次に定理の十分性を示すために, 次の定義とそれに基づく補題を与える．

定義 3.4.6. $K(\subset \mathbb{R})$: 体 とする．ある点 $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ が $x, y \in K$ を満たす時, p は K 点であるという．

補題 3.4.7. $K(\subset \mathbb{R})$: 体 とする．

- (1) 2 つの K 点 p_1, p_2 を通る直線の方程式は K 係数である．

(2) K 点 p_1 を中心とし, K 点 p_2 を通る円の方程式は K 係数である.

証明 . $p_1 = (a, b), p_2 = (c, d)$ と定める.

(1) 求める方程式は, $y - b = \frac{b-d}{a-c}(x-a)$ より

$$(b-d)x + (c-a)y + (ad-bc) = 0$$

$b-d, c-a, ad-bc \in K$ より, この方程式は K 係数である.

(2) 求める方程式は, $(x-a)^2 + (y-b)^2 = (c-a)^2 + (d-b)^2$ より

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by - c^2 - d^2 + 2ac + 2bd = 0$$

$1, -2a, -2b, -c^2 - d^2 + 2ac + 2bd \in K$ より, この方程式は K 係数である. $\square$

補題 3.4.8. $K(\subset \mathbb{R})$: 体とし, L, L' を K 係数方程式で与えられる平行でない 2 直線, C, C' を K 係数方程式で与えられる異なる 2 円とする.

(1) L と L' の交点は K 点である.

(2) L と C の交点が $K(\sqrt{\alpha})$ となるような $\alpha \in K$ が存在する.

(3) C と C' の交点は K 点である.

証明 . $a, b, c, d, e, f, p, q, r, s, t, u \in K$ とし, $L: ax+by+c=0, L': dx+ey+f=0, C: x^2+y^2+px+qy+r=0, C': x^2+y^2+sx+ty+u=0$ とする.

(1) L と L' の連立方程式 $\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ -f \end{pmatrix}$ を考える. L と L' は平行でないから, $-\frac{a}{b} \neq -\frac{d}{e}$ となり, $ae-bd \neq 0$ である. ゆえに $\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$ は逆行列を持ち,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -c \\ -f \end{pmatrix} = \frac{1}{ae-bd} \begin{pmatrix} e & -b \\ -d & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c \\ -f \end{pmatrix}$$

これより, $x = \frac{bf-ce}{ae-bd} \in K, y = \frac{cd-af}{ae-bd} \in K$ が求まる.

(2) $a=0, b \neq 0$ の時, L の式から $y = -\frac{c}{b} \in K$ である. これを C の式に代入すれば, $x^2 + \beta x + \gamma =$

0 ($\beta, \gamma \in K$) のような 2 次方程式の形にできる. ゆえに $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}$ となり, L と C が交点を持つことから $\beta^2 - 4\gamma \geq 0$ である. $\alpha = \frac{\beta^2 - 4\gamma}{4}$ とすれば, $x = -\frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\alpha} \in K(\sqrt{\alpha})$ となり, $\alpha \in K$ により題意を満たす. $a \neq 0, b=0$ の時も同様にして成り立つ.

$a \neq 0, b \neq 0$ の時, L の式から $y = \frac{-ax-c}{b}$ である. これを C に代入すると, 同様にして x 座標が $K(\sqrt{\alpha})$ に含まれることが分かり, これにより y 座標についても $K(\sqrt{\alpha})$ に含まれることが分かる.

(3) C の式から C' の式を引くと, $(p-s)x + (q-t)y + (r-u) = 0$ である. ゆえに (2) と同様に示すことができる. $\square$

証明 (定理 3.4.1($\Rightarrow$)). $\alpha \in \mathbb{R}$ が $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ から $\mathcal{E}$ 作図可能であるとする.

これは $A_{-1} = (0, 0), A_0 = (1, 0), A_1 = (a_1, 0), \dots, A_n = (a_n, 0)$ によりある点列 $A_{n+1}, A_{n+2}, \dots, A_N = (\alpha, 0)$ ($N > n$) が $\mathcal{E}$ 作図可能であることと同値である. この時, 各点 $A_i = (x_i, y_i)$ ($n+1 \leq i \leq N$) は次の (1), (2), (3) のいずれかを満たしている.

- (1) A_i は $A_{-1}, A_0, \dots, A_{i-1}$ のうち 2 点を通る直線同士の交点
- (2) A_i は $A_{-1}, A_0, \dots, A_{i-1}$ のうち 2 点を通る直線と $A_{-1}, A_0, \dots, A_{i-1}$ のうちの 1 点を中心, 他 1 点を通る円の交点である.
- (3) A_i は $A_{-1}, A_0, \dots, A_{i-1}$ のうち 1 点を中心とし, 他のもう 1 点を通る円同士の交点である.

ここで, $K_{n+1} = K_0(x_{n+1}, y_{n+1}), K_{n+2} = K_{n+1}(x_{n+2}, y_{n+2}), \dots, K_N = K_{N-1}(\alpha, 0)$ とする. 補題 3.4.8 より, $[K_{i+1} : K_i] = 1$ または 2 である. $[K_{i+1} : K_i] = 1 \Leftrightarrow K_{i+1} = K_i$ であるから, 2 次拡大となるものだけに注目すれば, 題意を満たす体の列 $K_0 \subset K'_1 \subset \dots \subset K'_m$ ($m \leq N - n$) を作ることができる. $\square$

3.5 折り紙作図法

ユークリッド作図可能定理が示せたことにより, ユークリッド作図法についてはその作図可能性に 1 つの結論が出た. ここからは, いよいよ一回折りの定理を用いた作図について述べていく. まずは, 一回折りの定理により構成される折り線を作図によって得られたものとして考え, 次のように折り紙作図法として再構成する.

定義 3.5.1. 折り紙作図法 $\mathcal{O}$ とは, 基本図形集合 $O = \{\emptyset, \text{平面上の全ての点, 直線}\}$ とし, 次の作図手順 $o_1, o_2, \dots, o_8$ からなる集合のことである.

- (o_1) $X_1 = \{(P, Q) \mid P \neq Q \in \mathbb{R}^2\}$, $Y_1 = \{l \mid l : \text{直線}\}$ とし, $o_1 : X_1 \rightarrow Y_1$ を $o_1((P, Q))$ が P, Q を通る直線となるように定める.
- (o_2) $o_2 : X_1 \rightarrow Y_1$ を $o_2((P, Q))$ が線分 PQ の垂直二等分線となるように定める.
- (o_3) $X_3 = \{(l, m) \mid l \not\parallel m : \text{直線}\}$ とし, $o_3 : X_3 \rightarrow Y_3$ を $o_3((l, m))$ が l と m のなす角の二等分線となるように定める.
- (o_4) $X_4 = \{(P, l) \mid P \in \mathbb{R}^2, l : \text{直線}\}$ とし, $o_4 : X_4 \rightarrow Y_1$ を $o_4((P, l))$ が P を通る l の垂線となるように定める.
- (o_5) $X_5 = \{(P, Q, l) \mid P \neq Q \in \mathbb{R}^2, l : \text{直線}\}$, $Y_5 = \{(l, m) \mid l, m \text{ は直線または } \emptyset\}$ とし, $o_5 : X_5 \rightarrow Y_5$ を $o_5((P, Q, l))$ が $\text{Prb}(P, l)$ の接線で Q を通る直線となるように定める. ただし, 条件を満たす直線が存在しない場合は $o_5((P, Q, l)) = (\emptyset, \emptyset)$, n のみ (1 本のみ) の場合は $o_5((P, Q, l)) = (n, \emptyset)$ と定める.
- (o_6) $X_6 = \{(P, Q, l, m) \mid P \neq Q \in \mathbb{R}^2, l \not\parallel m : \text{直線}\}$, $Y_6 = \{(l, m, n) \mid l, m, n \text{ は直線または } \emptyset\}$ とし, $o_6 : X_6 \rightarrow Y_6$ を $o_6((P, Q, l, m))$ が $\text{Prb}(P, l)$ と $\text{Prb}(Q, m)$ の共通接線となるように定める. ただし, 共通接線が u のみ (1 本のみ) の場合 $o_6((P, Q, l, m)) = (u, \emptyset, \emptyset)$, 共通接線が u, v のみ (2 本のみ) の場合 $o_6((P, Q, l, m)) = (u, v, \emptyset)$ と定める.
- (o_7) $X_7 = \{(P, l, m) \mid P \in \mathbb{R}^2, l \not\parallel m : \text{直線}\}$ とし, $o_7 : X_7 \rightarrow Y_1$ を $o_7((P, l, m))$ が $\text{Prb}(P, l)$ の接線で m の垂線となるように定める.
- (o_8) $o_8 : X_3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $o_8(l, m)$ が l と m の交点となるように定める.

作図手順のそれぞれのイメージは図 2 と同じである. o_1 から o_7 は一回折りの定理 ($\mathcal{O}_1$) から ($\mathcal{O}_7$) を作図手順として構成し直したものであることから, 以後, 作図手順を具体的に記述するときは「折る」という表現やアライメントによる表現を用いることとする.

折り紙作図法を明らかにしたところで, ユークリッド作図法のときと同様にこの作図可能数の集合が体となることを示す. そのために, 次の命題を示す.

命題 3.5.2. $\mathcal{E}$ 作図可能な点は $\mathcal{O}$ 作図可能である.

補題 3.5.3. A, B, C を一直線上にない与えられた点とする. C を通り直線 AB と平行な直線 l は $\mathcal{O}$ 作図可能である.

証明. 作図手順 o_4 により直線 AB を C を通るようにして折った折り線 k が作図できる. さらに作図手順 o_4 により直線 k を C を通るようにして折った折り線 l が作図できる. これこそが題意を満たす直線となる. $\square$

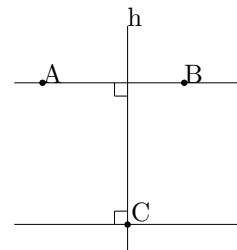


図 14: 平行線の作図

証明 (命題 3.5.2). 作図法 $\mathcal{E}$ の中で, 点を作図する作図手順は e_3, e_4, e_5 の 3 つである. そこで, これらから作図できる点が $\mathcal{O}$ 作図可能であることを示せばよい.

(e_3) $e_3 = o_8$ である.

(e_4) 中心 O で P を通る円を c とし, c を通る (または c と接する) 直線を l とする. 直線 l と点 O, P から c と l の交点が $\mathcal{O}$ 作図可能であることを示す. $P \notin l$ のとき, 作図手順 o_5 により P を l に重ねて O を通るように折った折り線 m_1, m_2 が作図できる. 作図手順 o_4 により P を通る m_1, m_2 それぞれの垂線 n_1, n_2 が作図できる. l と n_1 の交点および l と n_2 の交点が求める点となる. $P \in l$ のとき, 作図手順 o_4 により l を O を通るようにして折った折り線 m が作図できる. 作図手順 o_3 により l と m を重ねて折った折り線 n_1, n_2 が作図できる. 作図手順 o_4 により n_1 を P を通るようにして折った折り線 h が作図できる. h と m の交点を Q とおく. 作図手順 o_4 により n_2 を Q を通るようにして折った折り線 k が作図できる. k と l の交点が求める点となる. l が c の接線であるときは, O を通る l の垂線と l の交点として求めることができる.

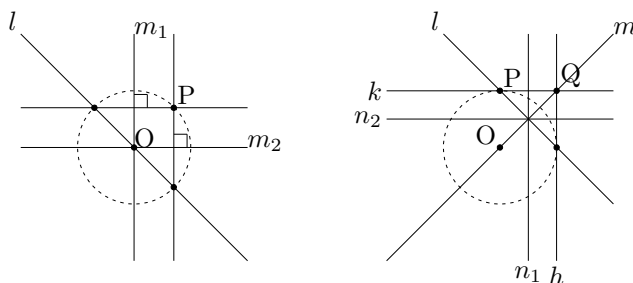


図 15: 折り紙による e_4 の作図

(e_5) 中心 Q で P を通る円 c_1 と中心 R で S を通る円 c_2 の交点が $\mathcal{O}$ 作図可能であることを示す. $d(P, Q) = r_1$, $d(R, S) = r_2$ とする. 作図手順 o_1 により直線 QR を折る. 作図手順 o_4 により直線 QR を Q を通るようにして折った折り線 l , R を通るようにして折った折り線 m が作図できる. ここで, 先ほど作図手順 e_4 が作図法 $\mathcal{O}$ で代用できることを示したことから, 円 c_1 と l の交点 E, E' が使える. 同様に, 円 c_2 と m の交点 G, G' が使える. ただし, E, G は直線 QR から見て同じ側にあるものとして定める. 補題 3.5.3 により, 直線 QR に平行で E, G を通る直線が作図できるので, それぞれの l, m との交点を F, H とおく. 作図手順 o_2 により F と H を重ねて折った折り線が作図できるので, これと直線 QR の交点を I とおく. 作図手順 o_4 により直線 BC を I を通るようにして折った折り線 n が作図できる. 最後に再び作図手順 e_4 を用いて円 c_1 と直線 n の交点 K, K' をとる. このとき, $QK = r_1$ かつ $RK = r_2$ が成り立つ. E', G' についても同様の操作を行うことで $QK' = r_1$ かつ $RK' = r_2$ であることが分かる. ゆえに, K, K' が求める点となる. 2 円が接するときは QR の垂直二等分線と QR の交点が求める点となる.

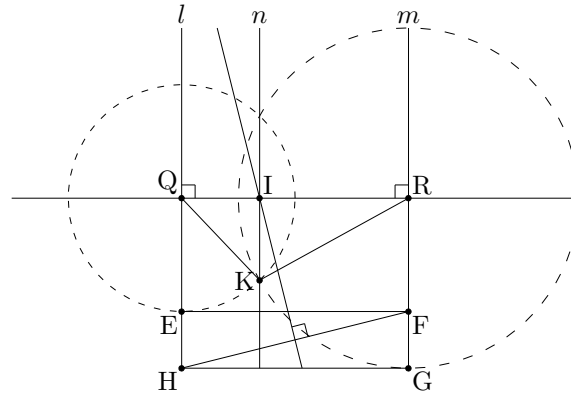


図 16: 折り紙による e_5 の作図

□

系 3.5.4. $\mathcal{O}$ 作図可能な数の集合は体である.

証明. 命題 3.5.2 より $\mathcal{E}$ 作図可能な点は全て $\mathcal{O}$ 作図可能である. よって補題 3.4.2 と同様にして任意の $\mathcal{O}$ 作図可能な 2 点の和, 差, 積, 商は $\mathcal{O}$ 作図可能となることより, 題意は示される. □

以上より, 折り紙作図法についても体の拡大理論を用いて作図可能性を考えられることが分かった. ところで, ユークリッド作図可能な点が折り紙作図法を用いても作図できることは示されたが, 果たして折り紙作図法はユークリッド作図法よりも優れていると言えるだろうか. すなわち, 折り紙作図可能な数の集合はユークリッド作図可能な数の集合を真に含んでいるのだろうか. この問題に答えるために, 以下からは作図手順を代数的な視点で捉え直し, 折り紙作図法により 1, 2, 3 次方程式の実数解が作図できることを示す.

以後, 命題 3.2.6 により長さ $|m|$ が $\mathcal{O}$ 作図可能 ($\mathcal{E}$ 作図可能) であることと, 傾き m の直線が $\mathcal{O}$ 作図可能 ($\mathcal{E}$ 作図可能) であることが必要十分であることを踏まえ, まずは 1 次方程式が折り紙作図法で解けることを示す.

命題 3.5.5. 2 つの実数 a, b ($a \neq 0$) が与えられているとき, 1 次方程式 $ax - b = 0$ の解は $\mathcal{O}$ 作図可能である.

証明. $\mathcal{O}$ 作図可能な数の集合は体であるから, $\frac{b}{a}$ が $\mathcal{O}$ 作図可能である. これは条件の方程式の解となっている. □

次に 2 次方程式が折り紙作図法で解けることを示す.

補題 3.5.6. 点 $P_0(v, w)$, 放物線 $\pi : x^2 = 4uy$ ($u \neq 0$) について, P_0 を通る π の接線 l の傾き s は $x^2 - \frac{v}{u}x + \frac{w}{u} = 0$ の実数解である.

証明. l の方程式は $y = s(x - v) + w$ と表せる. l と π は接するので,

$$x^2 = 4u(s(x - v) + w)$$

の判別式 $D = 0$ となる. これを計算すると,

$$s^2 - \frac{v}{u}s + \frac{w}{u} = 0$$

が得られる. これは s が条件の方程式の解であることを示している. $\square$

命題 3.5.7. 2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ の実数解は点 $P(-p, q)$ を通る放物線 $x^2 = 4y$ の接線の傾きである.

証明. 補題 3.5.6 について $u = 1$, $v = -p$, $w = q$ とすれば題意を満たす.

系 3.5.8. 点 $P(-p, q)$, $Q(0, 1)$, 直線 $l : y = -1$ について, $o_5(P, Q, l)$ の傾きは $x^2 + px + q = 0$ の解である. すなわち, $x^2 + px + q = 0$ の解は $\mathcal{O}$ 作図可能である.

証明. $o_5(P, Q, l)$ は P を通る $\text{Prb}(Q, l)$ の接線である. $\text{Prb}(Q, l) : x^2 = 4y$ より命題 3.5.7 が成り立つ. $\square$

最後に 3 次方程式が折り紙作図法で解けることを示す.

補題 3.5.9. 2 つの放物線 $\pi_1 : (y - n)^2 = 2a(x - m)$, $\pi_2 : x^2 = 2by$ ($a, b \neq 0$) について, π_1 と π_2 の共通接線の傾き c は $x^3 - \frac{2m}{b}x^2 + \frac{2n}{b}x + \frac{a}{b} = 0$ の実数解である.

証明. 共通接線 $k : y = cx + d$ とする. k と π_1 が接するので,

$$(cx + d - n)^2 = 2a(x - m)$$

の判別式 $D_1 = 0$ である. これを計算すると,

$$a^2 - 2ac(d - n + cm) = 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{9}$$

また, k と π_2 が接するので,

$$x^2 = 2b(cx + d)$$

の判別式 $D_2 = 0$ である. これを計算すると,

$$d = -\frac{bc^2}{2} \quad \dots\dots\dots \textcircled{10}$$

すなわち任意の c について, $\textcircled{10}$ が成り立てば k は π_2 と接する. ゆえに後はこれを $\textcircled{9}$ に代入して,

$$a - 2c \left(\left(-\frac{bc^2}{2} \right) - n + cm \right)$$

整理すると

$$c^3 - \frac{2m}{b}c^2 + \frac{2n}{b}c + \frac{a}{b} = 0$$

が得られる. これは c が条件の方程式の実数解であることを示している. $\square$

命題 3.5.10. 2 点 $F_1(-p + r, q)$, $F_2(0, 1)$, 2 直線 $l_1 : x = -p - r$, $l_2 : y = -1$ について, 3 次方程式 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ の実数解は $\text{Prb}(F_1, l_1)$ と $\text{Prb}(F_2, l_2)$ の共通接線の傾きである.

証明. 補題 3.5.9 について $b = 2$, $m = -p$, $n = q$, $a = 2r$ とすれば題意を満たす. $\square$

系 3.5.11. 命題 3.5.10 で定めた F_1, F_2, l_1, l_2 について, $o_6(F_1, F_2, l_1, l_2)$ の傾きは $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ の実数解である. すなわち, $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ の実数解は $\mathcal{O}$ 作図可能である.

証明 . $o_6(F_1, F_2, l_1, l_2)$ は $\text{Prb}(F_1, l_1)$ と $\text{Prb}(F_2, l_2)$ の共通接線であるから, 命題 3.5.10 が成り立つ. $\square$

3 次方程式の実数解は, 折り紙作図法にのみ作図可能性が保証されている. こうした意味で, ユークリッド作図法よりも折り紙作図法が優れていると言えるだろう. 実際, このことは第 3.7 節のように具体的な例を用いて示すこともできる.

3.6 折り紙作図可能性

結論として, ユークリッド作図法と同様に, ある数が折り紙作図可能かどうか, ある条件を満たしながら拡大していく体の列を作れるかどうかと同義になる. これを折り紙作図可能定理として以下に記す.

定理 3.6.1 (折り紙作図可能定理). $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $K_0 = \mathbb{Q}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ とする. このとき, 以下が成り立つ.

$\alpha \in \mathbb{R}$ が $a_1, a_2, \dots, a_n$ から $\mathcal{O}$ 作図可能 $\Leftrightarrow$ ある体の列 $K_1, K_2, \dots, K_n$ が次を満たす.

(1) $K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n \subset \mathbb{R}$

(2) $[K_i : K_{i-1}] = 2, 3 \ (1 \leq i \leq n)$

(3) $\alpha \in K_n$

和田 [2] の方法を一部変更して以下に示す. まずは十分性の証明についての補題を準備する.

補題 3.6.2. $a_1, a_2, \dots, a_n$ から $\mathcal{O}$ 作図可能な数を元とする体 $K(\subset \mathbb{R})$ について, L が K の 2 次拡大体または 3 次拡大体ならば L の元も全て $a_1, a_2, \dots, a_n$ から $\mathcal{O}$ 作図可能である.

証明 . 定理 3.3.5 より, L の元 α について $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3$ は K 上 1 次従属である. ゆえに少なくとも 1 つは 0 でない $a, b, c, d \in K$ を用いて $a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d = 0$ とできる. α は $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ で表される 3 次以下の実方程式の解となるので, 第 3.5 節の議論から $\mathcal{O}$ 作図可能であることが示せる. $\square$

証明 (定理 3.6.1($\Leftarrow$)). 条件を満たす体の列 $K_0, K_1, K_2, \dots, K_n$ が作れたとする. 定理 3.4.1 の証明より K_0 の任意の元は $a_1, a_2, \dots, a_n$ から $\mathcal{E}$ 作図可能であることが分かっているから, 同時に $a_1, a_2, \dots, a_n$ から $\mathcal{O}$ 作図可能でもある. 補題 3.6.2 より K_1 の任意の元は $a_1, a_2, \dots, a_n$ から $\mathcal{O}$ 作図可能である. 以下同様にして $K_2, K_3, \dots, K_n$ の任意の元も $a_1, a_2, \dots, a_n$ から $\mathcal{O}$ 作図可能である. ゆえに, K_n の元 α は $a_1, a_2, \dots, a_n$ から $\mathcal{O}$ 作図可能である. $\square$

必要性を示すため, 折り紙作図法によって得られる直線の式の係数について考えていく. 以下, 与えられる直線の式の係数は標準係数とする.

補題 3.6.3. 平行でない 2 直線 l_1, l_2 の交点の座標は $\mathbb{Q}$ に l_1, l_2 の標準係数を添加した体の元である.

証明 . $l_1 : a_1x + a_2y + a_3 = 0$, $l_2 : b_1x + b_2y + b_3 = 0$ とすると, 連立方程式を解いて

$$x = \frac{a_2b_3 - a_3b_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, y = \frac{a_1b_3 - a_3b_1}{a_2b_1 - a_1b_2}$$

となる. これは $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ の四則演算により作れるから題意を満たす. $\square$

補題 3.6.4. $P(p_1, p_2)$, $Q(q_1, q_2)$ を K 点とする. P, Q を通る直線 l の標準係数は K の元である.

証明． l の方程式は $p_1 \neq q_1$ のとき、 $y = \frac{p_2 - q_2}{p_1 - q_1}(x - p_1) + p_2$ となる．標準化すると、係数は $1, \frac{p_2 - q_2}{p_1 - q_1}, \frac{p_1 q_2 - p_2 q_1}{p_1 - q_1} \in K$ となり題意を満たす． $p_1 = q_1$ のとき、 l の方程式は $x = p_1$ となるので、こちらも題意を満たす． $\square$

補題 3.6.5. $P(p_1, p_2)$ を K 点、直線 $l: ax + by + c = 0$ ($a, b, c \in K$) とする． p を通る直線 l の垂線 m の標準係数は K の元である．

証明． $b \neq 0$ のとき、 $\frac{a}{b}x + y + \frac{c}{b} = 0$ と標準化できるので、改めて $ax + y + c = 0$ として考えてよい． $y = -ax - c$ となるので、さらに場合分けして考える．

(i) $a \neq 0$ のとき、 m の方程式は $y = \frac{1}{a}(x - p_1) + p_2$ となり、題意を満たすことが分かる．

(ii) $a = 0$ のとき、 $y = -c$ となるから m の方程式は $x = p_1$ となり題意を満たす．

$b = 0$ のとき、 $x = -\frac{c}{a}$ となり (ii) と同様に示される． $\square$

次に作図手順 o_5, o_6, o_7 により得られる直線を考えるが、これらはどれも放物線の接線となるため、まずは放物線の扱い方について準備する．

補題 3.6.6. $P(p_1, p_2)$ を K 点、直線 $l: ax + by + c = 0$ ($a, b, c \in K$) とする． $\text{Prb}(p, l)$ の方程式は適当な K の元 A, B, C, D, E, F を用いて $Ax^2 + Bx + Cy^2 + Dy + Exy + F = 0$ と書ける．

証明．与えられた放物線上の点 (x, y) について

$$\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{(x - p_1)^2 + (y - p_2)^2}$$

$$(ax + by + c)^2 = (a^2 + b^2)((x - p_1)^2 + (y - p_2)^2) \quad \dots\dots\dots \textcircled{11}$$

計算すると、

$$b^2x^2 - 2(ac + a^2p_1 + b^2p_1)x + a^2y^2 - 2(bc + a^2p_2 + b^2p_2)y - 2abxy + (a^2 + b^2)(p_1^2 + p_2^2) - c^2 = 0$$

となり、題意を満たすことが分かる．

一般の放物線についても扱いやすくするために、1 次変換によって準線が座標軸と平行になるように移動させることを考える．

補題 3.6.7. $P(p_1, p_2)$ を K 点、点 P を通らない直線 $l: ax + by + c = 0$ ($a, b, c \in K$) とする． K の元を係数とする正則な 1 次変換 f を $f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ となるように定める．このとき、 $f(\text{Prb}(P, l))$ は $s, u, v \in K$ ($s \neq 0$) を用いて $x = s(y - u)^2 + v$ と表せる．

証明． $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ が $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を満たすとする．

$A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるから、適当な $m, n \in K$ を用いて $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ m & n \end{pmatrix}$ とできる．

(x, y) が $f(\text{Prb}(P, l))$ 上であるとは、 $f^{-1}(x, y)$ が $\text{Prb}(P, l)$ 上にあることと同義であるから、 $(ax + my, bx + ny)$ が $\text{Prb}(P, l)$ 上と言い換えることができる．これを⑪に代入して整理すると、

$$2(a^2 + b^2)(ap_1 + bp_2 + c)x = (an - bm)^2y^2 + (y \text{ の } 1 \text{ 次式})$$

が求まる． x および y^2 の係数が 0 でないことが分かるので、 $s, s', s'' \in K$ ($s \neq 0$) を用いて $x = sy^2 + s'y + s''$ と表せる．後はこれを平方完成すれば、題意が示される． $\square$

系 3.6.8. $P(p_1, p_2)$ を K 点, 点 P を通らない直線 $l: ax + by + c = 0$ ($a, b, c \in K$) とする. K の元を係数とする正則な 1 次変換 f を $f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となるように定める. このとき, $f(\text{Prb}(P, l))$ は $s, u, v \in K$ ($s \neq 0$) を用いて $y = s(x - u)^2 + v$ と表せる.

証明. $g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ として $f' = g \circ f$ とすれば,

$$f'\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

補題 3.6.7 より, $f'(\text{Prb}(P, l))$ の方程式は $x = s(y - u)^2 + v$ と表せるので, $f(\text{Prb}(P, l))$ の方程式は $y = s(x - u)^2 + v$ と表せる. $\square$

補題 3.6.9. l を直線, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を体 K の元を係数とする正則な 1 次変換であるとする. このとき, $f(l)$ の係数が K の元であるならば, l の標準係数も K の元である.

証明. f を $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ として定める. このとき $(x, y) \in l$ であるとする, $(px + qy, rx + sy) \in f(l)$ である. ゆえに $f(l)$ の方程式を $ax + by + c = 0$ とおくと, l の方程式は

$$(ap + br)x + (aq + bs)y + c = 0$$

と求まり, 題意を満たすことが分かる. $\square$

以上を踏まえて, 作図手順 o_5, o_6, o_7 により得られる直線の標準係数がどうなるかを見ていこう.

命題 3.6.10. 異なる 2 点 P, Q を K 点, 直線 l を K 係数であるとする. Q を通る $\text{Prb}(P, l)$ の接線 m があるとき, m の標準係数は K の 2 次拡大体の元である.

証明. $l: ax + by + c = 0$ とする. 1 次変換 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} b & -a \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と定める. このとき, f は正則かつ K 係数であり, $f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である.

系 3.6.8 より, $f(\text{Prb}(P, l))$ は $s, u, v \in K$ ($s \neq 0$) を用いて $y = s(x - u)^2 + v$ と表される. また点 $f(Q)$ を (p, q) とおくと, $p, q \in K$ である. さらに, 直線 $f(m)$ の傾きを k とすると, その方程式は $y = k(x - p) + q$ と表される.

ゆえに $f(m)$ は $f(\text{Prb}(P, l))$ に接して $f(Q)$ を通るから,

$$k(x - p) + q = s(x - u)^2 + v$$

$$k(x - u + u - p) + q = s(x - u)^2 + v$$

ここで $X = x - u$ として整理すると,

$$sX^2 - kX + v - q - k(u - p) = 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{12}$$

$f(m)$ と $f(\text{Prb}(P, l))$ が接するとき, $\textcircled{12}$ の判別式は 0 であるから,

$$k^2 + 4s(k(u - p) - (v - q)) = 0$$

よって k は K 係数 2 次方程式の実数解, すなわち K 上既約な 2 次または 1 次多項式の根となる. 定理 3.3.5 より, k は K の 2 次拡大体の元となる. $\square$

系 3.6.11. P を K 点, 平行でない 2 直線 l, m を K 係数であるとする. m に垂直な $\text{Prb}(P, l)$ の接線 n があるとき, n の標準係数は K の 2 次拡大体の元である.

証明. m と n の交点を Q とすれば, これは命題 3.6.10 と同じである. $\square$

命題 3.6.12. 異なる 2 点 P, P' を K 点, 平行でない 2 直線 l, l' を K 係数であるとする. $\text{Prb}(P, l)$ と $\text{Prb}(P', l')$ の共通接線 k の標準係数は K の 3 次拡大体の元である.

証明. $P(p, q), P'(p', q'), l: ax + by + c = 0, l': a'x + b'y + c' = 0$ とする. $l \nparallel l'$ より $ab' - a'b \neq 0$ である. また, 1 次変換 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ab' - a'b} \begin{pmatrix} b' & a' \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

として定める. このとき, f は正則で K 係数であり, $f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる. 補題 3.6.7 および系 3.6.8 から,

$$\begin{aligned} f(\text{Prb}(P, l)) &: x = s(y - u)^2 + v \quad (s, u, v \in K) \\ f(\text{Prb}(P', l')) &: y = s'(x - u')^2 + v' \quad (s', u', v' \in K) \end{aligned}$$

とかける. さらに写像 h を x 軸方向に $-u'$, y 軸方向に $-v'$ 平行移動するものとして定めると,

$$\begin{aligned} h \circ f(\text{Prb}(P, l)) &: x = s(y - u - v')^2 + v - u' \quad (s, u, v \in K) \\ h \circ f(\text{Prb}(P', l')) &: y = s'x^2 \quad (s', u', v' \in K) \end{aligned}$$

となる. これらの共通接線 $h \circ f(k)$ の傾き c は, 補題 3.5.9 より $b = \frac{1}{2s'}, a = \frac{1}{2s}, m = v - u', n = u - v'$ として

$$x^3 - 4s'(v - u')x^2 + 4s'(u - v')x + \frac{s'}{s} = 0$$

の実数解となる. ゆえに, c は K の 3 次拡大体の元と分かる.

また補題 3.5.9 の証明より, 直線 $h \circ f(k)$ は点 $\left(0, -\frac{c^2}{4s'}\right)$ を通るので, $h \circ f(k)$ の標準係数も K の 3 次拡大体の元であることが分かる. h^{-1} は x 軸方向に u' , y 軸方向に v' 平行移動するものであることに注意すれば, $f(k)$ も K の 3 次拡大体の元である. よって補題 3.6.9 より, k の標準係数は K の 3 次拡大体の元となる. $\square$

以上を踏まえて, 必要性を示す. また平行でない 2 直線 l, m の交点を $(l \cap m)$ と表すこととする.

証明 (定理 3.6.1($\Rightarrow$)). 実数 α が $a_1, a_2, \dots, a_n$ から $\mathcal{O}$ 作図可能であるとする. このとき, $F_{-2}: y = 0, F_{-1}: x = 0, F_0: x = 1, F_1: x = a_1, F_2: x = a_2, \dots, F_n: x = a_n, F_m: y = \alpha x$ ($n \leq m$) とする直線の列 $F_{-2}, F_{-1}, F_0, F_1, \dots, F_m$ があり, F_i ($n+1 \leq i \leq m$) が次の (1) から (7) のいずれかを満たしている.

- (1) F_i は $-2 \leq r, s, t, u \leq i-1$ である r, s, t, u について, $F_i((F_r \cap F_s)) \leftrightarrow (F_t \cap F_u)$ が成り立つ.
- (2) F_i は $-2 \leq r, s, t, u \leq i-1$ である r, s, t, u について, $F_i((F_r \cap F_s)) \leftrightarrow (F_r \cap F_s)$ かつ $F_i((F_t \cap F_u)) \leftrightarrow (F_t \cap F_u)$ が成り立つ.
- (3) F_i は $-2 \leq r, s \leq i-1$ である r, s について, $F_i(F_r) \leftrightarrow F_s$ が成り立つ.
- (4) F_i は $-2 \leq r, s, t \leq i-1$ である r, s, t について, $F_i((F_r \cap F_s)) \leftrightarrow (F_r \cap F_s)$ かつ $F_i(F_t) \leftrightarrow F_t$ が成り立つ.

- (5) F_i は $-2 \leq r, s, t, u, v \leq i-1$ である r, s, t, u, v について, $F_i((F_r \cap F_s)) \leftrightarrow (F_r \cap F_s)$ かつ $F_i((F_t \cap F_u)) \leftrightarrow F_v$ が成り立つ.
- (6) F_i は $-2 \leq r, s, t, u, v, w \leq i-1$ である r, s, t, u, v, w について, $F_i((F_r \cap F_s)) \leftrightarrow F_t$ かつ $F_i((F_u \cap F_v)) \leftrightarrow F_w$ が成り立つ.
- (7) F_i は $-2 \leq r, s, t, u \leq i-1$ である r, s, t, u について, $F_i((F_r \cap F_s)) \leftrightarrow F_t$ かつ $F_i(F_u) \leftrightarrow F_u$ が成り立つ.

また, 体 $K_n = \mathbb{Q}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $K_{i+1} = K_i(F_{i+1}$ の標準係数) となるように定める. このとき, $\alpha \in K_l$ となる $l \in \mathbb{N}$ が存在して, 定理 3.4.1, 補題 3.6.3, 補題 3.6.4, 補題 3.6.5, 命題 3.6.10, 系 3.6.11, 命題 3.6.12 により $[K_i : K_{i-1}] = 1, 2, 3$ を満たす. ゆえに $[K_i : K_{i-1}] = 1$ となる体をそれぞれ同一視して列を作り直せば, 題意を満たす体の列ができる. $\square$

3.7 ギリシャの三大作図問題の作図可能性

本章の結びとして, 折り紙作図可能な数の集合がユークリッド作図可能な数の集合を真に含むことを, ギリシャの三大作図問題の作図可能性から示す. ギリシャの三大作図問題とは, 以下の 3 つの作図可能性を考えるものである.

- (1) 円周率 π
- (2) 立方根
- (3) 任意の角の三等分線

円周率 π については $\mathbb{R}$ 上代数的な数でない (超越的な数という) ことが知られているため, 代数的な数の中で作図可能性を考えるユークリッド作図法および折り紙作図法においては作図不可能であると言える. しかし他 2 つについては, ユークリッド作図法と折り紙作図法では異なった結論が得られる.

定理 3.7.1. $\sqrt[3]{2}$ は $\mathcal{O}$ 作図可能であるが, $\mathcal{E}$ 作図不可能である.

補題 3.7.2. 多項式 $x^3 - 2$ は $\mathbb{Q}$ 上既約である.

証明. $\mathbb{Q}$ 上可約であるとする. $x^3 - 2 = 0$ の実数解は $\sqrt[3]{2}$ ただ 1 つであるから, 有理係数多項式 $x - \sqrt[3]{2}$ を因数にもつ. これは $\sqrt[3]{2}$ が無理数であることに矛盾する. $\square$

証明 (定理 3.7.1). $\sqrt[3]{2}$ は 3 次方程式 $x^3 - 2 = 0$ の実数解である. ゆえに, 系 3.5.11 より $\mathcal{O}$ 作図可能である (実際に, 命題 3.5.10 で与えられている点と直線に値を作図し $\mathcal{O}_6$ の折り方を行うことで得られる).

また補題 3.7.2 より, $\sqrt[3]{2}$ は $\mathbb{Q}$ 上既約な 3 次多項式の根である. 定理 3.3.5 より, $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$ となる. ここで, $\sqrt[3]{2}$ が $\mathcal{E}$ 作図可能であるとする, 定理 3.4.1 より,

$$\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_N \subset \mathbb{R} \quad (0 \leq i \leq N-1, [K_i : K_{i-1}] = 2, \sqrt[3]{2} \in K_N)$$

となる体の列 $K_0, K_1, K_2, \dots, K_N$ が存在する. このとき, 命題 3.3.8 より $[K_N : \mathbb{Q}] = 2^N$ が成り立つ. ところが, $[K_N : \mathbb{Q}] = [K_N : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})][K_N : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3[K_N : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}]$ ともできるため, これらは矛盾する. ゆえに, $\sqrt[3]{2}$ は $\mathcal{E}$ 作図不可能である. $\square$

一般に, $x^3 - n$ が $\mathbb{Q}$ 上既約な多項式となる $n \in \mathbb{Q}$ については, 同様 $\mathcal{O}$ 作図可能であるが, $\mathcal{E}$ 作図不可能であることを示すことができる.

定理 3.7.3. 任意の角の三等分線は $\mathcal{O}$ 作図可能であるが, $\mathcal{E}$ 作図不可能である.

補題 3.7.4. 多項式 $x^3 - 3x - 1$ は $\mathbb{Q}$ 上既約である.

証明. $f(x) = x^3 - 3x - 1$ が $\mathbb{Q}$ 上可約であるとする. すなわち, $f(x)$ はある有理数 $\frac{a}{b}$ (a, b は互いに素) を根にもつ. ゆえに, $\frac{a^3}{b^3} - 3\frac{a}{b} - 1 = 0$ であり, 整理すると

$$a^3 = b^2(3a + b)$$

これは a と b が互いに素であることに矛盾する. □

証明. 任意の角の三等分線が $\mathcal{O}$ 作図可能であることを示すには, $\tan 3\theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) が与えられたとき, $\tan \theta$ が $\mathcal{O}$ 作図可能であることを示せばよい.

$$\tan 3\theta = \frac{\tan \theta(3 - \tan^2 \theta)}{1 - 3\tan^2 \theta} \text{ より, } \tan 3\theta = a, \tan \theta = x \text{ とおけば,}$$

$$x^3 - 3ax^2 - 3x + a = 0$$

すなわち, 3 次方程式の解を求めることになるので, 系 3.5.11 より $\mathcal{O}$ 作図可能となる.

次に, $\mathcal{E}$ 作図不可能であることを示すために, $\cos \frac{\pi}{3}$ が与えられたとき, $\cos \frac{\pi}{9}$ が作図不可能であることを示す.

$$\cos \frac{\pi}{3} = 4\cos^3 \frac{\pi}{9} - 3\cos \frac{\pi}{9} \text{ より, } 4\cos^3 \frac{\pi}{9} - 3\cos \frac{\pi}{9} - \frac{1}{2} = 0 \text{ が成り立つ. ここで, } t = \cos \frac{\pi}{9} \text{ とおくと,}$$

$$4t^3 - 3t - \frac{1}{2} = 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{13}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \cos \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi \right) = \cos \left(\frac{\pi}{3} + 4\pi \right) \text{ より,}$$

$$\cos \frac{\pi}{9} = \cos \left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi}{3} \right) = \cos \left(\frac{\frac{\pi}{3} + 4\pi}{3} \right)$$

ゆえに, $\cos \frac{\pi}{9} = \cos \frac{7\pi}{9} = \cos \frac{13\pi}{9}$ は $\textcircled{13}$ の実数解となる.

$\sin \frac{\pi}{9}$ が $\cos \frac{\pi}{9}$ から $\mathcal{E}$ 作図可能であること, $\cos \frac{2\pi}{3} = \cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ が全て $\mathcal{E}$ 作図可能であることに注意すれば, $\cos \frac{7\pi}{9}$, $\cos \frac{13\pi}{9}$ も $\cos \frac{\pi}{9}$ から $\mathcal{E}$ 作図可能であることが分かる.

ゆえに, この対偶を考えれば, $\textcircled{13}$ の実数解のうち, 1 つでも $\mathcal{E}$ 作図不可能な数があれば $\cos \frac{\pi}{9}$ が $\mathcal{E}$ 作図不可能であることを示せるということができる. これは $x = 2t$ として方程式を $x^3 - 3x - 1 = 0$ としたとしても成り立つ. 補題 3.7.4 より, $x^3 - 3x - 1$ は $\mathbb{Q}$ 上既約な 3 次多項式であるから, その根 ρ について定理 3.3.5 より $[\mathbb{Q}(\rho) : \mathbb{Q}] = 3$ が成り立つ. ゆえに, 定理 3.7.1 と同様に $\mathcal{E}$ 作図不可能であることを示すことができる. □

立方根および角の三等分線についての具体的な作図方法については [2]pp.52-54 を参照してもらいたい. 以上より, 結果として次のことが示された.

定理 3.7.5. $\{x : \mathcal{E} \text{ 作図可能な数} \} \subsetneq \{x : \mathcal{O} \text{ 作図可能な数} \}$

4 平坦折り紙の代数表現

本章では、平坦に折り畳むという操作に限定した折り紙の代数表現について述べる。

平坦に折り畳んだ折り紙のことを、ここからは平坦折り紙と呼ぶことにしよう。平坦折り紙とは、以下に述べていくように折った後の形を表す“作用”と、重なり順を表す“半順序”による組み合わせで表現することができる。実際に、この代数表現を使った“折り鶴”を第4.3節に記載している。また、平坦に折り畳まれた折り紙の局所的な性質を述べた定理として通説化されている2つの定理「単頂点平坦折り紙の山折りと谷折りの差は ± 2 である（前川の定理）」「単頂点平坦折り紙の折り目の成す角の交代和は $\pm\pi$ である（川崎の定理）」について、この代数表現を用いて示すことができる。

以後、集合 $A \in \mathbb{R}^2$ 上の直線とは A の2つの元を含む直線のことを表す。また集合 A, B について $A - B$ とは A から B を引いた差集合 $\{x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$ を表す。

4.1 序論

本章で扱う基礎的な知識について、この節でまとめる。

定義 4.1.1 (近傍). a を点, ε を正の実数とする. $U(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(a, x) < \varepsilon\}$ を a の ε 近傍という。

定義 4.1.2 (開集合). $A \subset \mathbb{R}^2$ とする. a が A の内点であるとは、以下の条件を満たすことをいう。

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } U(a, \varepsilon) \subset A$$

また, $A^\circ = \{a \mid a \text{ は } A \text{ の内点}\}$ を A の内部といい, $A = A^\circ$ を満たす A を開集合という。

定義 4.1.3 (閉集合). $B \subset \mathbb{R}^2$ とする. b が B の触点であるとは、以下の条件を満たすことをいう。

$$\forall \varepsilon > 0, U(b, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$$

また, $\overline{B} = \{b \mid b \text{ は } B \text{ の触点}\}$ を B の閉包といい, $B = \overline{B}$ を満たす B を閉集合という。

定義 4.1.4 (境界). C を集合とする. c が C の外点であるとは, c は C の補集合の内点であることをいう. d が C の境界点であるとは, d が C の内点でも外点でもないことをいう. また, $\partial C = \{d \mid d \text{ は } C \text{ の境界点}\}$ を C の境界という。

定義 4.1.5 (有界). D を集合とする. D が有界であるとは、以下の条件を満たすことをいう。

$$\exists M > 0 \text{ s.t. } \forall x, y \in D, d(x, y) < M$$

定義 4.1.6 (連結). E を開集合とする. E が非連結であるとは、以下の条件を満たすことをいう。

$$\exists V, W : \text{空でない開集合 s.t. } E = V \cup W \text{ かつ } V \cap W = \emptyset$$

集合 E が非連結でないとき, E は連結であるという。

定義 4.1.7 (連結成分). F を開集合とする. $V_1, V_2, \dots, V_n$ ($n \in \mathbb{N}$) はいずれも互いに共通部分を持たない連結集合の列であり, $F = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n$ を満たすとする. このとき, $V_1, V_2, \dots, V_n$ が開集合 F の連結成分であるとは、以下の条件を満たすことをいう。

$$\forall W \supset V_i \in \{V_1, V_2, \dots, V_n\}, W : \text{連結} \Rightarrow W \not\subset F$$

以下は第4.2節で扱う「作用」と「半順序」に関連する知識をまとめたものである。

定義 4.1.8 (作用). $\mathbb{A}$ を集合とする. この時, 写像 $\theta: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ を $\mathbb{A}$ 上の作用素といい, $a \in \mathbb{A}$ における $\theta(a)$ を θa と略記する. また $A \subset \mathbb{A}$ についても, 像 $\theta(A)$ を θA と略記する.

Ω を集合とし, その元を $\mathbb{A}$ 上の作用素と定める. すなわち, 写像 $\Pi: \Omega \rightarrow \{\theta \mid \theta: \mathbb{A} \text{ 上の作用素}\}$ を定める. この時, 組 $(\Pi, \Omega, \mathbb{A})$ を Ω の $\mathbb{A}$ への作用という.

注意. 以後, $\omega \in \Omega$ の Π による像 $\Pi(\omega)$ を単に ω と略記する. また, $(\omega)^{-1}A$ ($A \subset \mathbb{A}$) とは作用素 ω による A の逆像のことを表す.

定義 4.1.9 (二項関係). A を集合とする. 集合 $R \subset A^2$ を A 上の二項関係という. このとき, $(x, y) \in R$ を xRy と表す.

定義 4.1.10 (半順序). P を集合, $\preceq$ を P 上の二項関係とする. $(P, \preceq)$ が半順序集合であるとは, 以下の条件を満たすことをいう.

(反射律) $\forall a \in P, a \preceq a$

(反対称律) $\forall a, b \in P, a = b \Leftrightarrow (a \preceq b \text{ かつ } b \preceq a)$

(推移律) $\forall a, b, c \in P, (a \preceq b \text{ かつ } b \preceq c) \Rightarrow a \preceq c$

このとき, $\preceq$ を P 上の半順序という.

半順序の対比として同値関係も以下に記しておく.

定義 4.1.11 (同値関係). A を集合, R を A 上の二項関係とする. R が同値関係であるとは, 以下の条件を満たすことをいう.

(反射律) $\forall a \in A, aRa$

(対称律) $\forall a, b \in A, aRb \Leftrightarrow bRa$

(推移律) $\forall a, b, c \in A, (aRb \text{ かつ } bRc) \Rightarrow aRc$

このとき, 集合 $[a] = \{b \in A \mid aRb\}$ を a の同値類という. また, A の元に対して R で定まる同値類の集合 $\{[a] \mid a \in A\}$ を商集合といい, A/R と表す.

また, 半順序に関する写像の概念として次のようなものがある.

定義 4.1.12 (順序同型). $(S, \preceq_1), (T, \preceq_2)$ を半順序集合とする.

全単射写像 $f: S \rightarrow T$ が順序同型写像であるとは, 以下の条件のどちらかを満たすことをいう.

(1) $\forall a, b \in S, a \preceq_1 b \Leftrightarrow f(a) \preceq_2 f(b)$

(1') $\forall a, b \in S, a \preceq_1 b \Leftrightarrow f(a) \succeq_2 f(b)$

このとき, $(S, \preceq_1)$ と $(T, \preceq_2)$ は順序同型であるといい, $(S, \preceq_1) \cong (T, \preceq_2)$ と表す.

命題 4.1.13. $\cong$ は同値関係である.

証明. (反射律) 順序同型写像として恒等変換をとればよい.

(対称律) 順序同型写像は全単射であるから, 逆写像をとればよい.

(推移律) 順序同型写像の合成も順序同型写像であるから, 合成写像をとればよい.

□

以下は第 4.4 節で扱う「閉曲線」についてまとめたものである。

定義 4.1.14 (閉曲線). $x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $y: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ を連続関数とする. 関数 $C: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$C(t) = (x(t), y(t))$$

で定める, このとき C を曲線という. 特に $C(0) = C(1)$ であるとき, C を閉曲線という.

定義 4.1.15 (回転数). C を閉曲線とする. また点 $p = (u, v) \in \mathbb{R}^2$ は C の内側 (すなわち $\mathbb{R}^2 - C$ の連結成分のうち有界集合であるもの) に含まれるとする. このとき, p を中心とする極座標表示

$$C(t) = (x(t) - u, y(t) - v) = (r(t) \cos \theta(t), r(t) \sin \theta(t))$$

を考える. ただし, $r: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, $\theta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ は連続関数とする. このとき, 次で定める $\text{Wind}_p(C)$ を閉曲線 C の p 周りの回転数という.

$$\text{Wind}_p(C) = \frac{\theta(1) - \theta(0)}{2\pi}$$

特に p が原点のとき, 単に閉曲線 C の回転数という.

最後に, 第 4.6 節で扱う「相似」について, 以下にまとめる.

定義 4.1.16 (拡大・縮小変換). $k \in \mathbb{R}$ とする. 写像 $\mu_k: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $\mu_k(x, y) = (kx, ky)$ として定める. $k > 0$ のとき, μ_k を拡大変換, $0 < k < 1$ のとき, μ_k を縮小変換という.

定義 4.1.17 (相似). 写像 $\sigma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ が合同変換, 拡大・縮小変換, またはこれらの合成写像であるとき, σ を相似変換という. 特に, 図形 $A, B \subset \mathbb{R}^2$ について, $\sigma(A) = B$ となる相似変換 σ が存在するとき, A と B は相似であるといい, $A \sim B$ と表す.

命題 4.1.18. $\sim$ は同値関係である.

証明. (反射律) 相似変換として恒等変換をとればよい.

(対称律) 相似変換は全単射であるから, 逆写像をとればよい.

(推移律) 相似変換の合成も相似変換であるから, 合成写像をとればよい.

□

4.2 仮想平坦折り紙

平坦折り紙を次のように作用と半順序の組で表す.

定義 4.2.1 (仮想平坦折り紙). $A(\subset \mathbb{R}^2)$ を内点を持つ有界閉集合とする.

始めに $\mathcal{F}_1 = \{(f_{11} \cdots f_{1n_1}) \mid f_{11}, \dots, f_{1n_1}: A^\circ \text{ 上の直線}, n_1 \in \mathbb{N}\}$ とする.

$\mathcal{F}_1$ の $\mathbb{R}^2$ への作用 $(\Pi, \mathcal{F}_1, \mathbb{R}^2)$ と半順序 $\preceq_1$ について, 組 $((f_{11} \cdots f_{1n_1})A, \preceq_1)$ を次のように定める.

(FO₁) 集合 $A_1, A_2, \dots, A_{k_1}$ ($k_1 \in \mathbb{N}$) を $A^\circ - \bigcup_{i=1}^{n_1} f_{1i}$ の各連結成分の閉包とする.

(FO₂) 作用素 $(f_{11} \cdots f_{1n_1})$ を $(f_{11} \cdots f_{1n_1})A_i$ ($i = 1, 2, \dots, k_1$) がそれぞれ $f_{11}, \dots, f_{1n_1}$ のいずれかに関する鏡映変換 (またはこれらの合成写像) となるように定める.

(FO₃) $\{A_1, \dots, A_{k_1}\}$ の異なる元 A_i, A_j に対して, $(f_{11} \cdots f_{1n_1})A_i^\circ \cap (f_{11} \cdots f_{1n_1})A_j^\circ \neq \emptyset$ であるならば, $A_i \prec_1 A_j$ または $A_i \succ_1 A_j$ のいずれかの順序を定める.

次に $\mathcal{F}_2 = \{(f_{21} \cdots f_{2n_2})F_1 \mid F_1 \in \mathcal{F}_1, f_{21}, \dots, f_{2n_2} : F_1 A \text{ 上の折り線}, n_2 \in \mathbb{N}\}$ とする.

$\mathcal{F}_2$ の $\mathbb{R}^2$ への作用 $(\Pi, \mathcal{F}_2, \mathbb{R}^2)$ と半順序 $\preceq_2$ について組 $((f_{21} \cdots f_{2n_2})(f_{11} \cdots f_{1n_1})A, \preceq_2)$ を次のように定める.

(FO₁) 集合 $B_1, B_2, \dots, B_{k_2}$ ($k_2 \in \mathbb{N}$) を $A^\circ - \left(\bigcup_{i=1}^{n_1} f_{1i} \cup \bigcup_{j=1}^{n_2} ((f_{11} \cdots f_{1n_1}))^{-1} f_{2j} \right)$ の各連結成分の閉包とする.

(FO₂) 作用素 $(f_{21} \cdots f_{2n_2})(f_{11} \cdots f_{1n_1})$ を $(f_{21} \cdots f_{2n_2})(f_{11} \cdots f_{1n_1})B_i$ ($i = 1, 2, \dots, k_2$) がそれぞれ作用素 $(f_{11} \cdots f_{1n_1})$ に $f_{21}, \dots, f_{2n_2}$ のいずれかに関する鏡映変換 (またはこれらの合成写像) を合成した写像となるように定める.

(FO₃) $\{B_1, \dots, B_{k_2}\}$ の異なる元 B_i, B_j に対して, $(f_{21} \cdots f_{2n_2})(f_{11} \cdots f_{1n_1})B_i^\circ \cap (f_{21} \cdots f_{2n_2})(f_{11} \cdots f_{1n_1})B_j^\circ \neq \emptyset$ であるならば, $B_i \prec_2 B_j$ または $B_i \succ_2 B_j$ のいずれかの順序を定める.

帰納的に $\mathcal{F}_m = \{(f_{m1} \cdots f_{mn_m})F_{m-1} \mid F_{m-1} \in \mathcal{F}_{m-1}, f_{m1}, \dots, f_{mn_m} : F_{m-1}A \text{ 上の折り線}, n_m \in \mathbb{N}\}$ を考える. ($m \in \mathbb{N}$)

$\mathcal{F}_m$ の $\mathbb{R}^2$ への作用 $(\Pi, \mathcal{F}_m, \mathbb{R}^2)$ と半順序 $\preceq_m$ について $((f_{m1} \cdots f_{mn_m}) \cdots (f_{11} \cdots f_{1n_1})A, \preceq_m)$ を次のように同様にして定めることができる.

(FO₁) 集合 $C_1, \dots, C_{k_m}$ ($k_m \in \mathbb{N}$) を

$$A^\circ - \left(\bigcup_{i=1}^{n_1} f_{1i} \cup \bigcup_{j=1}^{n_2} ((f_{11} \cdots f_{1n_1}))^{-1} f_{2j} \cup \cdots \cup \bigcup_{k=1}^{n_m} ((f_{m-11} \cdots f_{m-1n_{m-1}}) \cdots (f_{11} \cdots f_{1n_1}))^{-1} f_{mk} \right)$$

の各連結成分の閉包とする.

(FO₂) 作用素 $(f_{m1} \cdots f_{mn_m}) \cdots (f_{11} \cdots f_{1n_1})$ を $(f_{m1} \cdots f_{mn_m}) \cdots (f_{11} \cdots f_{1n_1})C_i$ ($i = 1, 2, \dots, k_m$) がそれぞれ作用素 $(f_{m-11} \cdots f_{m-1n_{m-1}}) \cdots (f_{11} \cdots f_{1n_1})$ に $f_{m1}, \dots, f_{mn_m}$ のいずれかに関する鏡映変換 (またはこれらの合成写像) を合成した写像となるように定める.

(FO₃) $\{C_1, \dots, C_{k_m}\}$ の異なる元 C_i, C_j に対して,

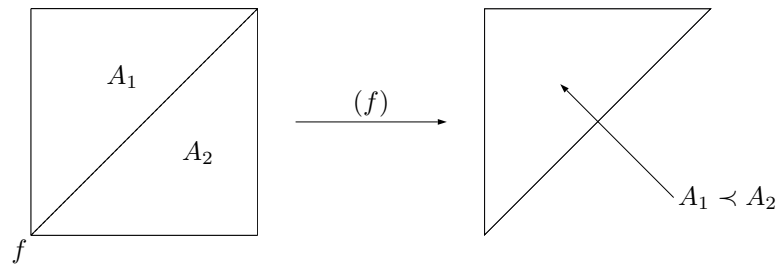
$$(f_{m1} \cdots f_{mn_m}) \cdots (f_{11} \cdots f_{1n_1})C_i^\circ \cap (f_{m1} \cdots f_{mn_m}) \cdots (f_{11} \cdots f_{1n_1})C_j^\circ \neq \emptyset$$

であるならば, $C_i \prec_m C_j$ または $C_i \succ_m C_j$ のいずれかの順序を定める.

以上のようにして定めた $((f_{m1} \cdots f_{mn_m}) \cdots (f_{11} \cdots f_{1n_1})A, \preceq_m)$ を仮想平坦折り紙という. また以後, 仮想平坦折り紙に定まる半順序 $\preceq_1, \preceq_2, \dots, \preceq_m$ を同一視して $\preceq$ と表し, これを重なり順とよぶ.

実際に $A = [0, 1] \times [0, 1]$ (: 正方形) として, いくつか仮想平坦折り紙の具体例を挙げよう.

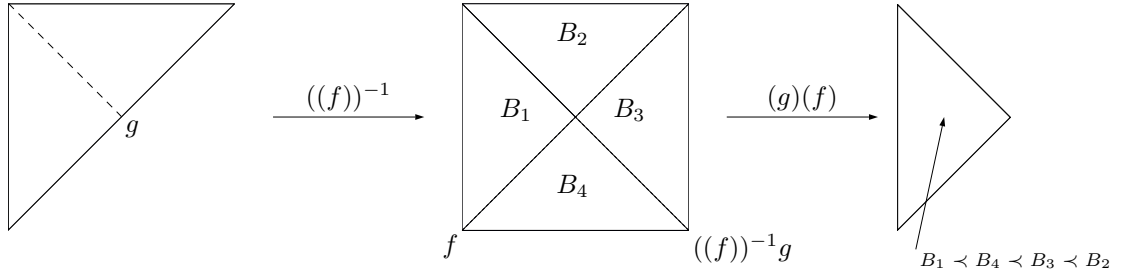
(例 1) 正方形を半分に折るとは, 例えば次のような $((f)A, \preceq)$ によって表現できる.



作用素 (f) は次のように定められる.

$$\begin{aligned}(f)x &= R_f(x) & (x \in A_2) \\ (f)x &= x & (x \in A_1)\end{aligned}$$

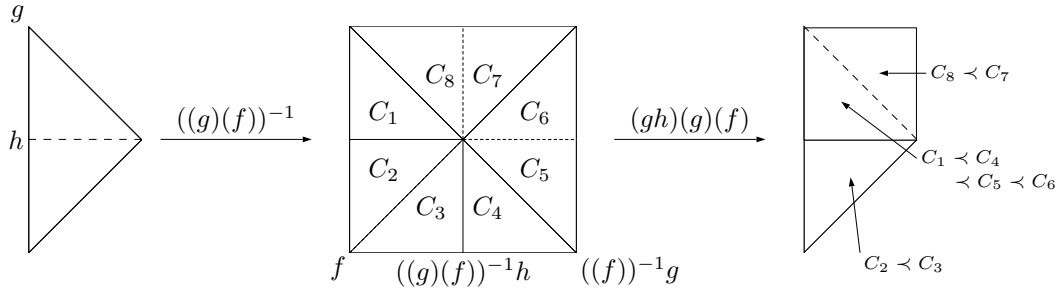
(例 2) 例 1 をさらに半分に折るとは, 例えば次のような $((g)(f)A, \preceq)$ によって表現できる.



作用素 $(g)(f)$ は次のように定められる.

$$\begin{aligned}(g)(f)x &= R_g((f)x) & (x \in B_2 \cup B_3) \\ (g)(f)x &= (f)x & (x \in B_1 \cup B_4)\end{aligned}$$

(例 3) 「袋折り」とよばれる技法は, 例えば次のような $((gh)(g)(f)A, \preceq)$ によって表現できる.



作用素 $(gh)(g)(f)$ は次のように定められる.

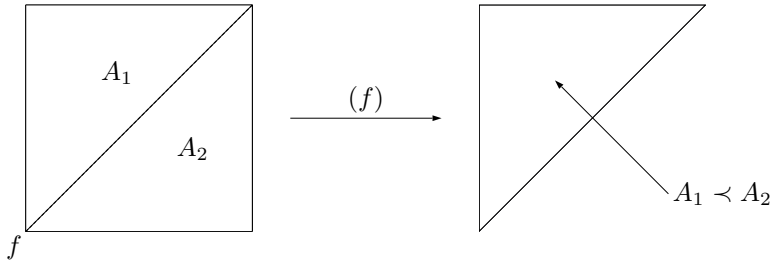
$$\begin{aligned}(gh)(g)(f)x &= R_h \circ R_g((g)(f)x) & (x \in C_7) \\ (gh)(g)(f)x &= R_h((g)(f)x) & (x \in C_6) \\ (gh)(g)(f)x &= R_g((g)(f)x) & (x \in C_8) \\ (gh)(g)(f)x &= (g)(f)x & (x \text{ in others})\end{aligned}$$

4.3 仮想平坦折り紙による折り鶴の代数表現

仮想平坦折り紙を用いた具体例として, ここでは正方形を基にした折り鶴の作成過程を定義 4.2.1 に従って表してみよう. なお折り紙の図は全て, 三谷 (2005) によるフリーソフト “ORIPA” を用いて作成したものを基とし, これに編集を加えて掲載した. ORIPA とは, 折り紙の展開図を書くためのドローソフトであり, 正方形上に山折り線や谷折り線を指定することで, 平坦に折った後の形の候補を出力するものである.

以下, $A = [0, 1] \times [0, 1]$: 正方形とする.

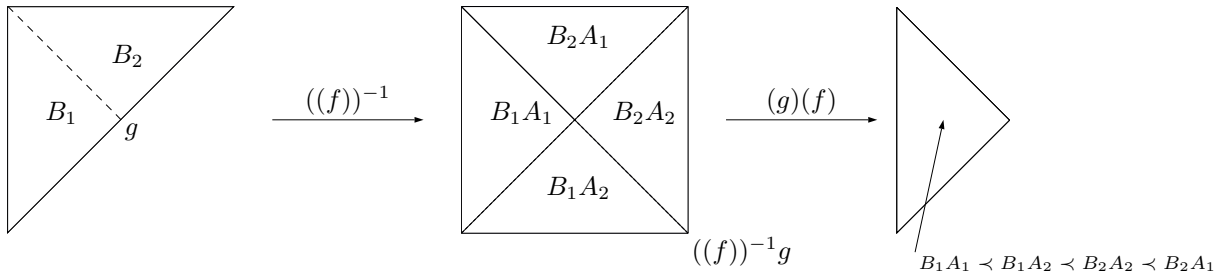
(Step 1) $((f)A, \preceq)$



作用素 (f) を次のように定める.

$$\begin{aligned} (f)x &= R_f(x) & (x \in A_2) \\ (f)x &= x & (x \in A_1) \end{aligned}$$

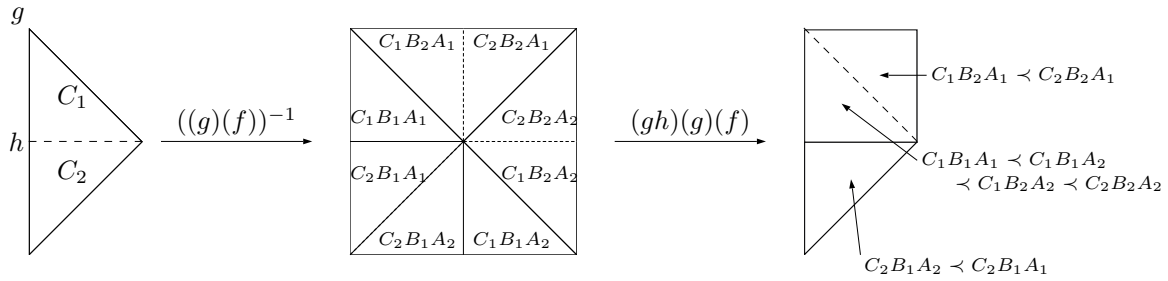
(Step 2) $((g)(f)A, \preceq)$



作用素 $(g)(f)$ を次のように定める.

$$\begin{aligned} (g)(f)x &= R_g((f)x) & ((f)x \in B_2) \\ (g)(f)x &= (f)x & ((f)x \in B_1) \end{aligned}$$

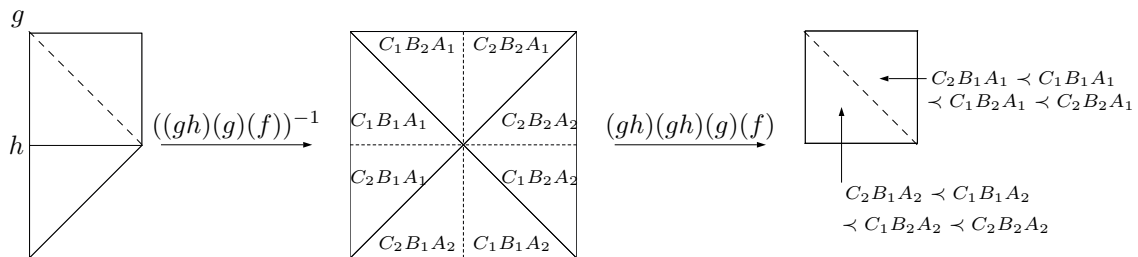
(Step 3) $((gh)(g)(f)A, \preceq)$



作用素 $(gh)(g)(f)$ を次のように定める.

$$\begin{aligned} (gh)(g)(f)x &= R_h \circ R_g((g)(f)x) & (x \in C_2B_2A_1) \\ (gh)(g)(f)x &= R_h((g)(f)x) & (x \in C_2B_2A_2) \\ (gh)(g)(f)x &= R_g((g)(f)x) & (x \in C_1B_2A_1) \\ (gh)(g)(f)x &= (g)(f)x & (x \text{ in others}) \end{aligned}$$

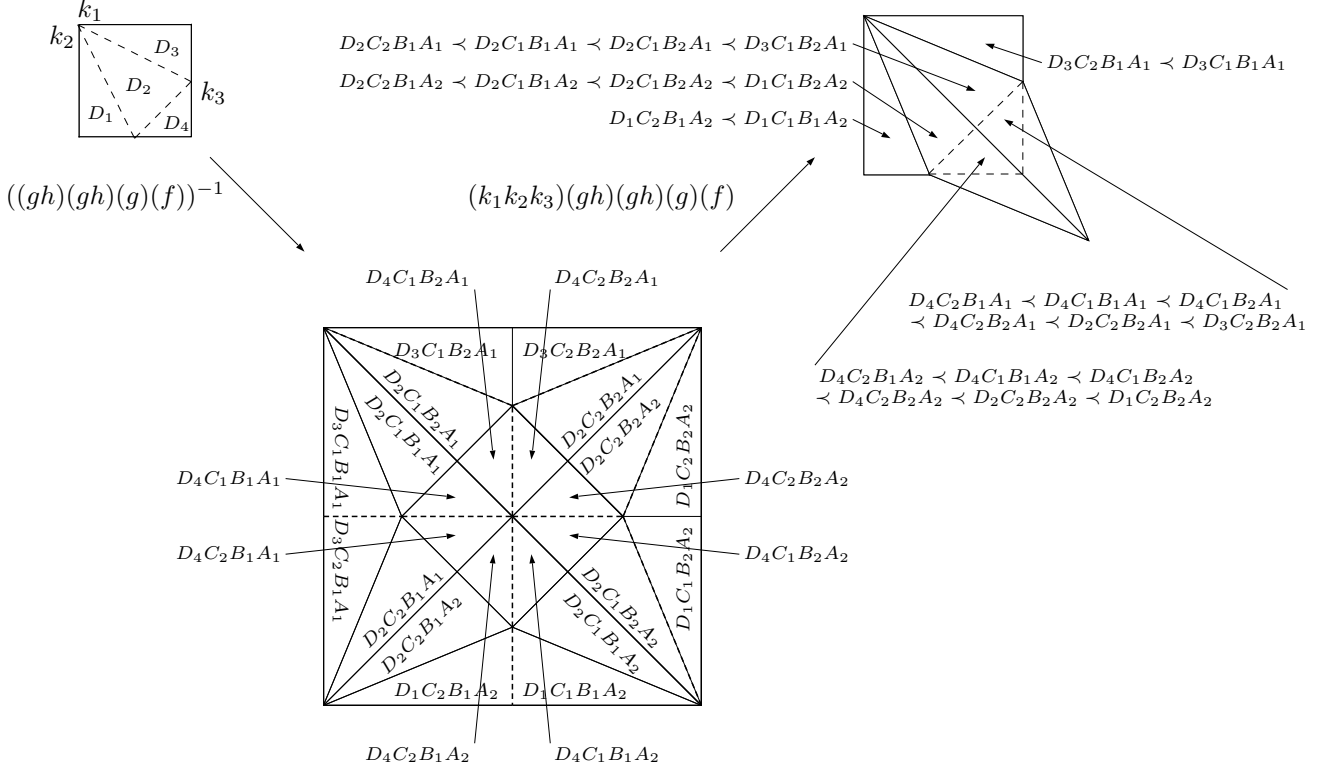
(Step 4) $((gh)(gh)(g)(f)A, \preceq)$



作用素 $(gh)(gh)(g)(f)$ を次のように定める.

$$\begin{aligned}
(gh)(gh)(g)(f)x &= R_h \circ R_g((gh)(g)(f)x) & (x \in C_2B_1A_1) \\
(gh)(gh)(g)(f)x &= R_h((gh)(g)(f)x) & (x \in C_2B_1A_2) \\
(gh)(gh)(g)(f)x &= R_g((gh)(g)(f)x) & (x \in C_1B_1A_1) \\
(gh)(gh)(g)(f)x &= (gh)(g)(f)x & (x \text{ in others})
\end{aligned}$$

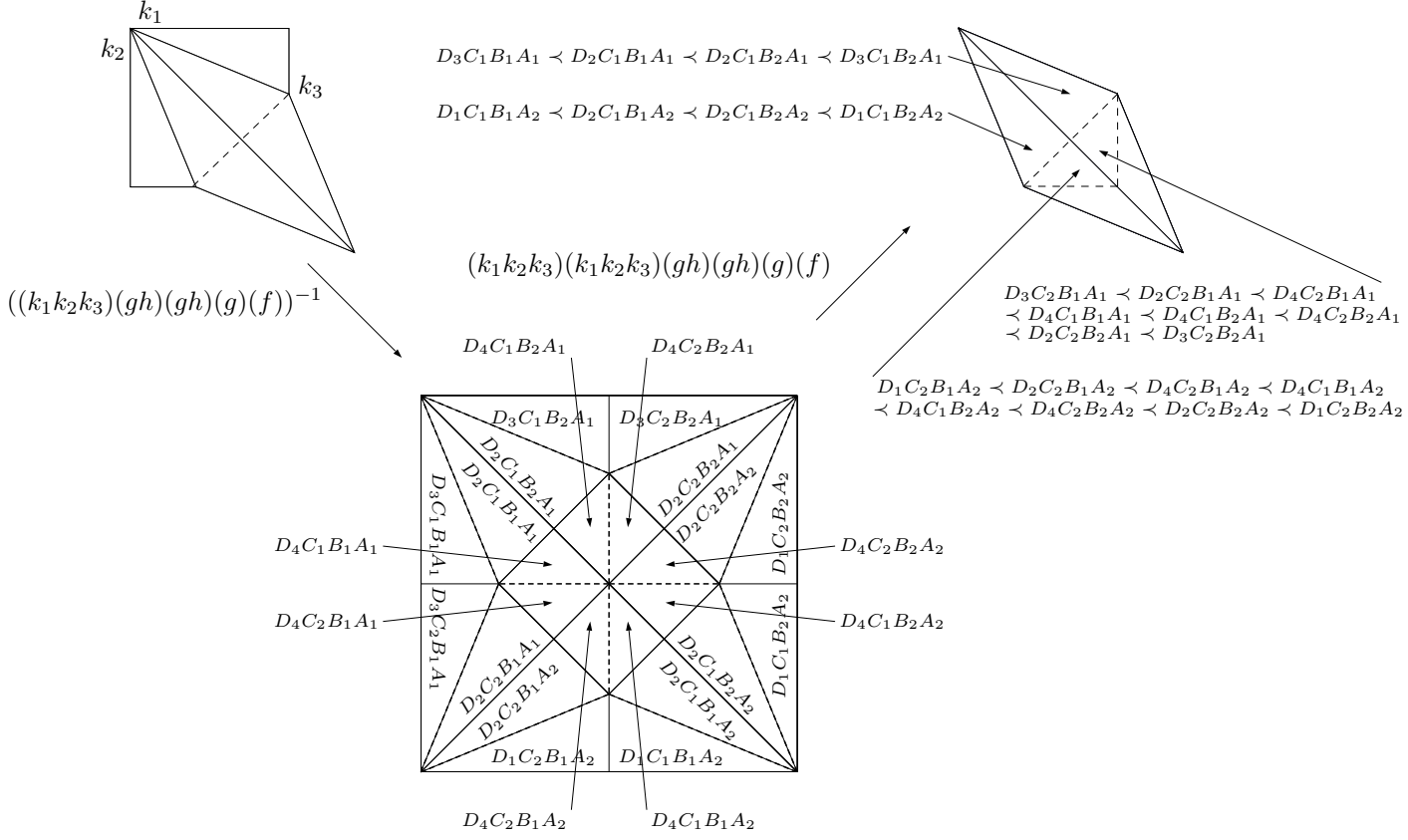
(Step 5) $((k_1k_2k_3)(gh)(gh)(g)(f)A, \preceq)$



作用素 $(k_1k_2k_3)(gh)(gh)(g)(f)$ を次のように定める.

$$\begin{aligned}
(k_1k_2k_3)(gh)(gh)(g)(f)x &= R_{k_1} \circ R_{k_3}((gh)(gh)(g)(f)x) & (x \in D_1C_2B_2A_2) \\
(k_1k_2k_3)(gh)(gh)(g)(f)x &= R_{k_2} \circ R_{k_3}((gh)(gh)(g)(f)x) & (x \in D_3C_2B_2A_1) \\
(k_1k_2k_3)(gh)(gh)(g)(f)x &= R_{k_1}((gh)(gh)(g)(f)x) & (x \in D_3C_1B_2A_1) \\
(k_1k_2k_3)(gh)(gh)(g)(f)x &= R_{k_2}((gh)(gh)(g)(f)x) & (x \in D_1C_1B_2A_2) \\
(k_1k_2k_3)(gh)(gh)(g)(f)x &= R_{k_3}((gh)(gh)(g)(f)x) & (x \in D_2C_2B_2A_1 \cup D_2C_2B_2A_2) \\
(k_1k_2k_3)(gh)(gh)(g)(f)x &= (gh)(gh)(g)(f)x & (x \text{ in others})
\end{aligned}$$

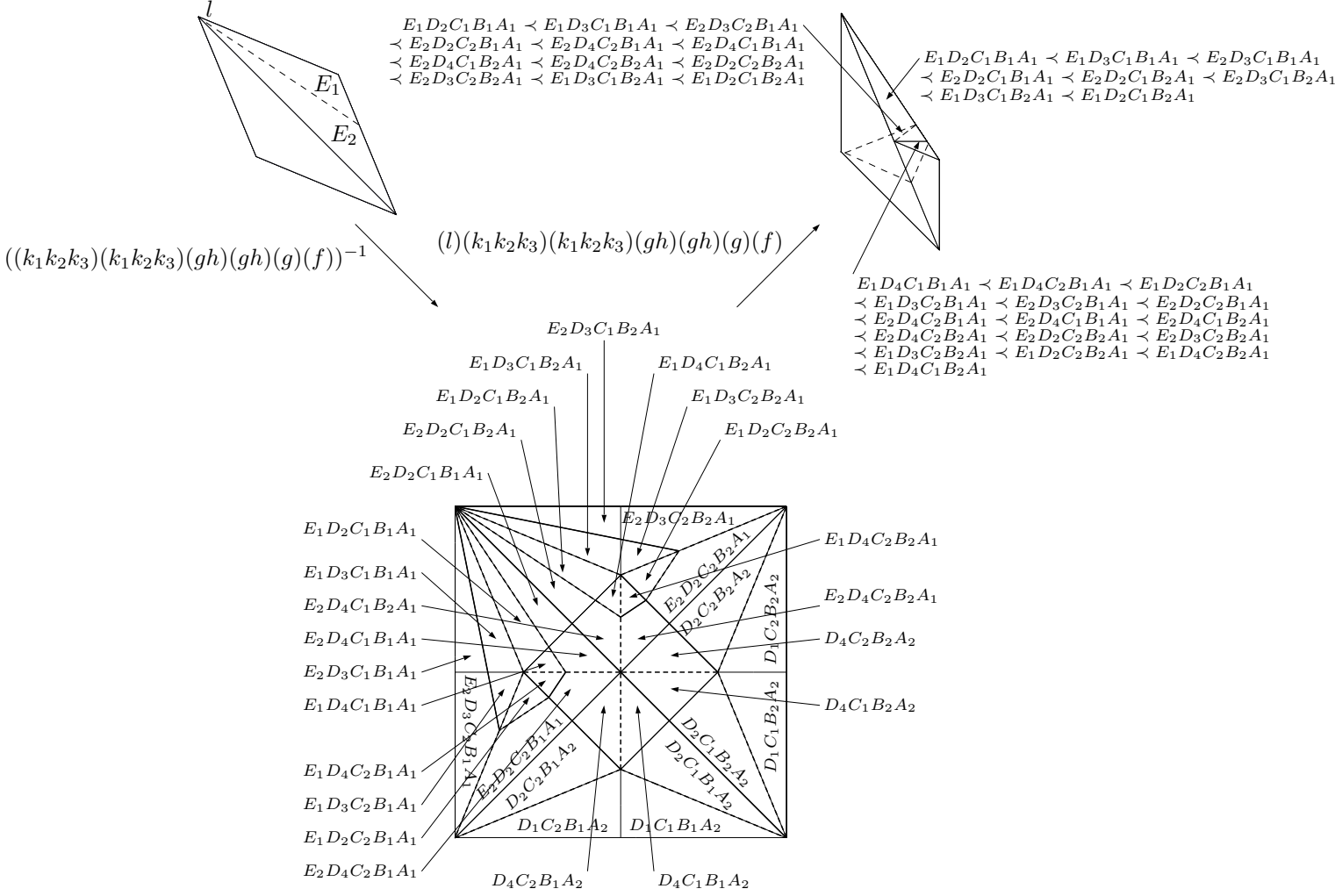
(Step 6) $((k_1 k_2 k_3)(k_1 k_2 k_3)(gh)(gh)(g)(f)A, \preceq)$



作用素 $(k_1 k_2 k_3)(k_1 k_2 k_3)(gh)(gh)(g)(f)$ を次のように定める.

$$\begin{aligned}
 (k_1 k_2 k_3)(k_1 k_2 k_3)(gh)(gh)(g)(f)x &= R_{k_1} \circ R_{k_3}((k_1 k_2 k_3)(gh)(gh)(g)(f)x) & (x \in D_3 C_2 B_1 A_1) \\
 (k_1 k_2 k_3)(k_1 k_2 k_3)(gh)(gh)(g)(f)x &= R_{k_2} \circ R_{k_3}((k_1 k_2 k_3)(gh)(gh)(g)(f)x) & (x \in D_1 C_2 B_1 A_2) \\
 (k_1 k_2 k_3)(k_1 k_2 k_3)(gh)(gh)(g)(f)x &= R_{k_1}((k_1 k_2 k_3)(gh)(gh)(g)(f)x) & (x \in D_3 C_1 B_1 A_1) \\
 (k_1 k_2 k_3)(k_1 k_2 k_3)(gh)(gh)(g)(f)x &= R_{k_2}((k_1 k_2 k_3)(gh)(gh)(g)(f)x) & (x \in D_1 C_1 B_1 A_2) \\
 (k_1 k_2 k_3)(k_1 k_2 k_3)(gh)(gh)(g)(f)x &= R_{k_3}((k_1 k_2 k_3)(gh)(gh)(g)(f)x) & (x \in D_2 C_2 B_1 A_1 \cup D_2 C_2 B_1 A_2) \\
 (k_1 k_2 k_3)(k_1 k_2 k_3)(gh)(gh)(g)(f)x &= (k_1 k_2 k_3)(gh)(gh)(g)(f)x & (x \text{ in others})
 \end{aligned}$$

(Step 7) $((l)(k_1k_2k_3)(k_1k_2k_3)(gh)(gh)(g)(f)A, \preceq)$

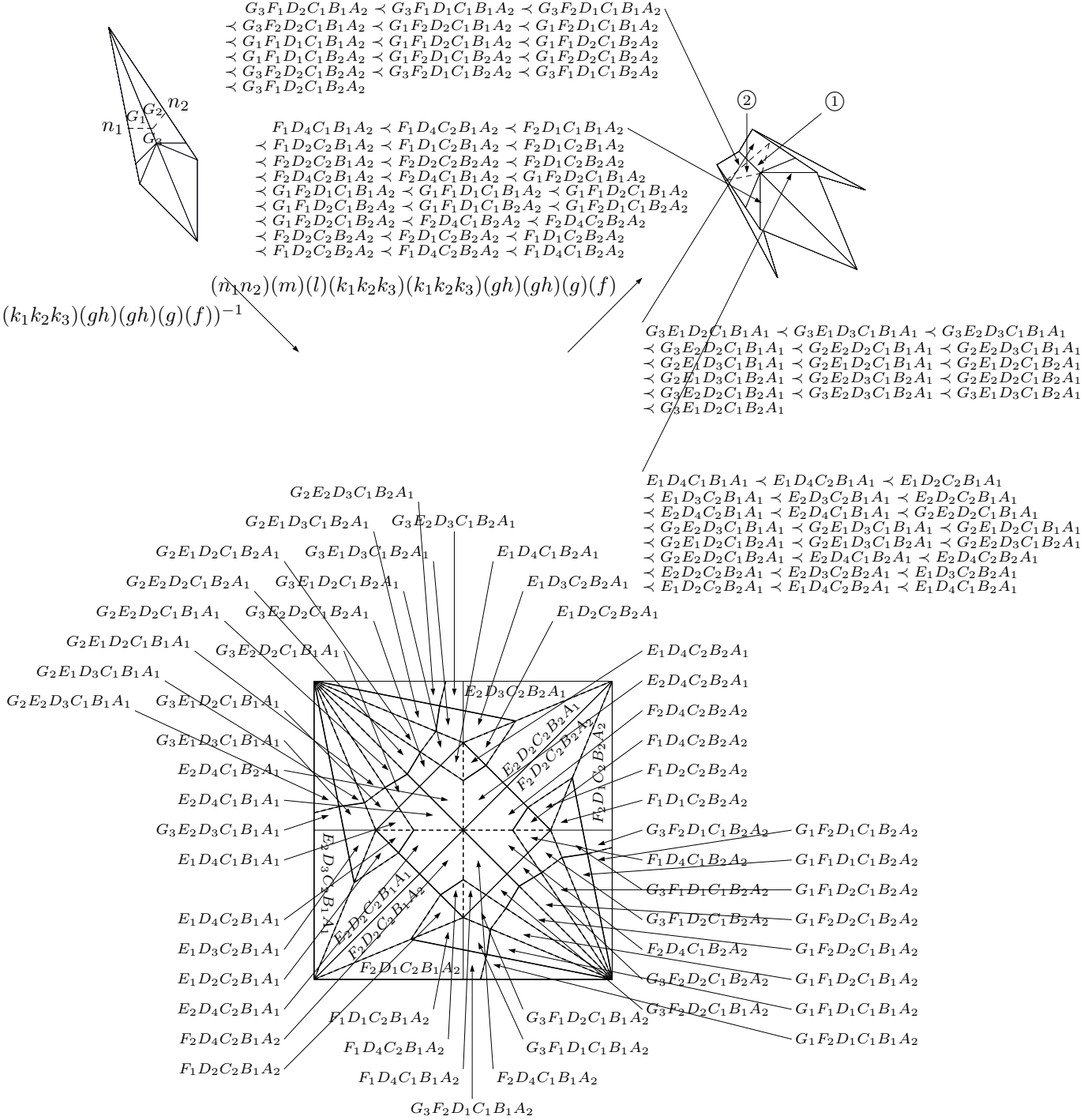


作用素 $(l)(k_1k_2k_3)(k_1k_2k_3)(gh)(gh)(g)(f)$ を次のように定める.

$$\begin{aligned}
 (l)(k_1k_2k_3)(k_1k_2k_3)(gh)(gh)(g)(f)x &= R_l((k_1k_2k_3)(k_1k_2k_3)(gh)(gh)(g)(f)x) \\
 ((k_1k_2k_3)(k_1k_2k_3)(gh)(gh)(g)(f)x \in E_1) \\
 (l)(k_1k_2k_3)(k_1k_2k_3)(gh)(gh)(g)(f)x &= (k_1k_2k_3)(k_1k_2k_3)(gh)(gh)(g)(f)x \quad (x \text{ in others})
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} (m)(l)(k_1 k_2 k_3)(k_1 k_2 k_3)(gh)(gh)(g)(f)x = & R_m((l)(k_1 k_2 k_3)(k_1 k_2 k_3)(gh)(gh)(g)(f)x) \\ (l)(k_1 k_2 k_3)(k_1 k_2 k_3)(gh)(gh)(g)(f)x \in F_1 & \\ (m)(l)(k_1 k_2 k_3)(k_1 k_2 k_3)(gh)(gh)(g)(f)x = & (l)(k_1 k_2 k_3)(k_1 k_2 k_3)(gh)(gh)(g)(f)x \quad (x \text{ in others}) \end{array}$$

(Step 9) $((n_1 n_2)(m)(l)(k_1 k_2 k_3)(k_1 k_2 k_3)(gh)(gh)(g)(f)A, \preceq)$

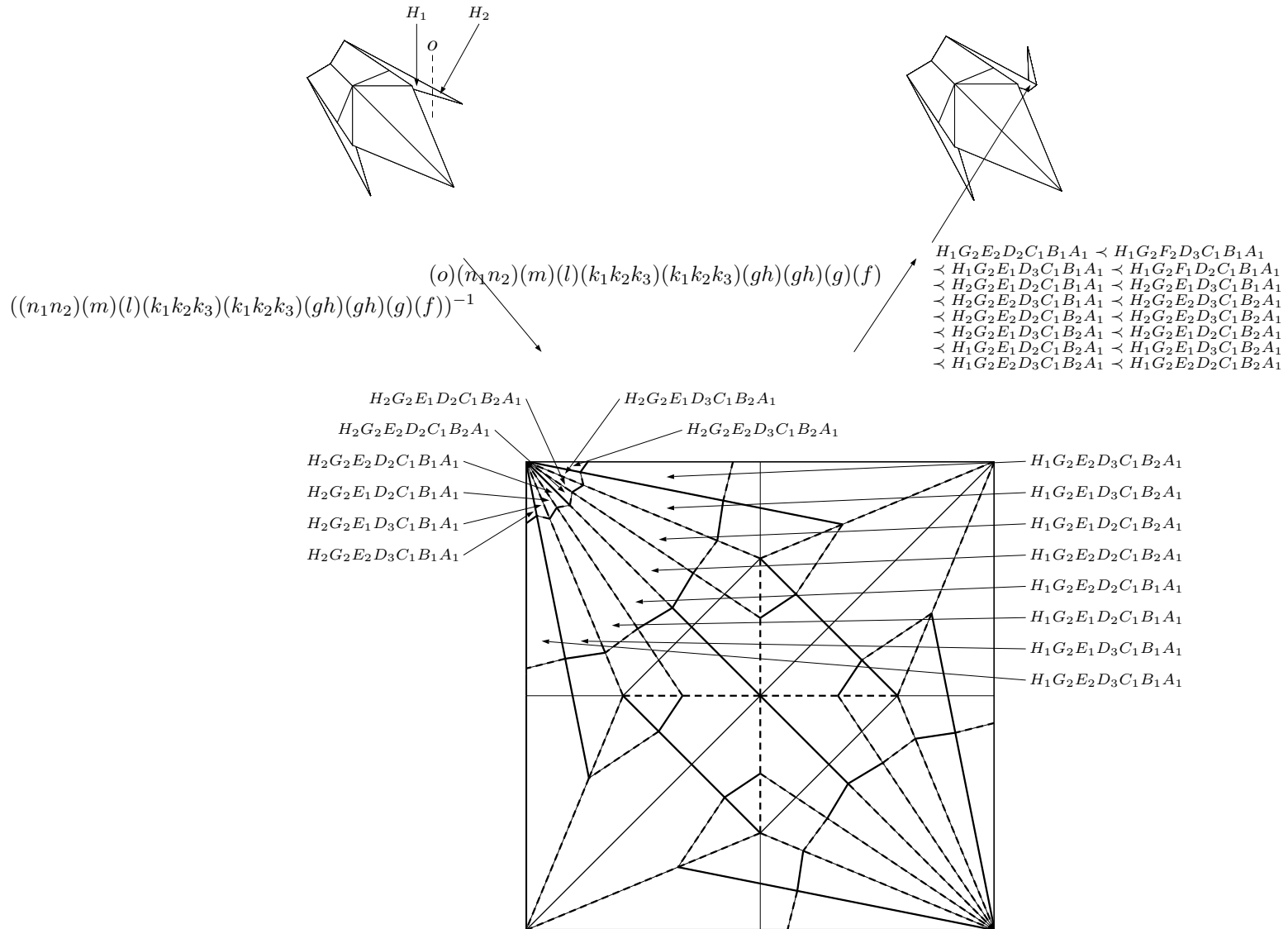


$$\begin{aligned}
& G_1 F_1 D_2 C_1 B_2 A_2 \prec G_1 F_1 D_1 C_1 B_2 A_2 \prec G_1 F_2 D_1 C_1 B_2 A_2 \prec G_1 F_2 D_2 C_1 B_2 A_2 \prec F_2 D_4 C_1 B_2 A_2 \prec F_2 D_4 C_2 B_2 A_2 \prec \\
& F_2 D_2 C_2 B_2 A_2 \prec F_2 D_1 C_2 B_2 A_2 \prec G_3 F_1 D_1 C_1 B_2 A_2 \prec G_3 F_1 D_2 C_1 B_2 A_2
\end{aligned}$$

作用素 $(n_1, n_2)(m)(l)(k_1 k_2 k_3)(k_1 k_2 k_3)(gh)(gh)(g)(f)$ を次のように定める.

$$\begin{aligned}
(n_1 n_2)(m)(l)(k_1 k_2 k_3)(k_1 k_2 k_3)(gh)(gh)(g)(f)x &= R_{n_1}((m)(l)(k_1 k_2 k_3)(k_1 k_2 k_3)(gh)(gh)(g)(f)x) \\
((m)(l)(k_1 k_2 k_3)(k_1 k_2 k_3)(gh)(gh)(g)(f)x \in G_1) \\
(n_1 n_2)(m)(l)(k_1 k_2 k_3)(k_1 k_2 k_3)(gh)(gh)(g)(f)x &= R_{n_2}((m)(l)(k_1 k_2 k_3)(k_1 k_2 k_3)(gh)(gh)(g)(f)x) \\
((m)(l)(k_1 k_2 k_3)(k_1 k_2 k_3)(gh)(gh)(g)(f)x \in G_2) \\
(n_1 n_2)(m)(l)(k_1 k_2 k_3)(k_1 k_2 k_3)(gh)(gh)(g)(f)x &= (m)(l)(k_1 k_2 k_3)(k_1 k_2 k_3)(gh)(gh)(g)(f)x \quad (x \text{ in others})
\end{aligned}$$

(Step 10) $((o)(n_1 n_2)(m)(l)(k_1 k_2 k_3)(k_1 k_2 k_3)(gh)(gh)(g)(f)A, \preceq)$



作用素 $(o)(n_1n_2)(m)(l)(k_1k_2k_3)(k_1k_2k_3)(gh)(gh)(g)(f)$ を次のように定める.

$$\begin{aligned} (o)(n_1n_2)(m)(l)(k_1k_2k_3)(k_1k_2k_3)(gh)(gh)(g)(f)x &= R_o((n_1n_2)(m)(l)(k_1k_2k_3)(k_1k_2k_3)(gh)(gh)(g)(f)x) \\ ((n_1n_2)(m)(l)(k_1k_2k_3)(k_1k_2k_3)(gh)(gh)(g)(f)x \in H_1) \\ (o)(n_1n_2)(m)(l)(k_1k_2k_3)(k_1k_2k_3)(gh)(gh)(g)(f)x &= (n_1n_2)(m)(l)(k_1k_2k_3)(k_1k_2k_3)(gh)(gh)(g)(f)x \\ (x \text{ in others}) \end{aligned}$$

以上のように定めた仮想平坦折り紙 $((o)(n_1n_2)(m)(l)(k_1k_2k_3)(k_1k_2k_3)(gh)(gh)(g)(f)A, \preceq)$ は折り鶴の一例となる.

4.4 折り紙用語の代数表現

折り紙に関する様々な用語についても, 仮想平坦折り紙を使って表現することができる. これについて, 仮想平坦折り紙の性質を述べながら以下に紹介する.

以後, 仮想平坦折り紙 $\mathcal{A} = ((f_{m1} \cdots f_{mn_m}) \cdots (f_{11} \cdots f_{1n_1})A, \prec)$ は (FO_1) により定まった領域 $A_1, A_2, \dots, A_n$ をもつものとする. 展開された各折り線を元とする集合

$$\{f_{11}, \dots, f_{1n_1}, \dots, ((f_{m-11} \cdots f_{m-1n_{m-1}}) \cdots (f_{11} \cdots f_{1n_1}))^{-1} f_{mn_m}\}$$

を $\text{dev}\mathcal{A}$ と表し, $\mathcal{A}$ に定まっている作用素 $(f_{m1} \cdots f_{mn_m}) \cdots (f_{11} \cdots f_{1n_1})$ を F と表す.

また, 集合 A に対して $\#\{A\}$ とは, A に含まれる要素の個数を表す.

命題 4.4.1. 仮想平坦折り紙 $\mathcal{A}$ における $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ の任意の異なる元 A_i, A_j について次が成り立つ.

$$\#\{A_i \cap A_j\} > 1 \Rightarrow \exists! f \in \text{dev}\mathcal{A} \text{ s.t. } \#\{f \cap A_i \cap A_j\} > 1$$

証明. 条件 $\#\{A_i \cap A_j\} > 1$ より, A_i と A_j は互いに隣り合う. 定義 4.2.1 より, A_i と A_j の境目 $A_i \cap A_j$ はある $f \in \text{dev}\mathcal{A}$ の部分集合となる. ゆえに, 題意が成り立つ. $\square$

命題 4.4.1 により, (FO_1) により定まる領域の境目は, 折り線に依らず隣り合う領域によって決まることが分かる. ゆえに, 「折り目」は仮想平坦折り紙において次のように定義できる.

定義 4.4.2 (折り目). 仮想平坦折り紙 $\mathcal{A}$ における $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ の任意の異なる元 A_i, A_j について, $\#\{A_i \cap A_j\} > 1$ が成り立つとき, $c_{ij} = \{x \mid x \in A_i \cap A_j\}$ を A_i と A_j の間の折り目という. 特に i, j を指定しない時, これを $\mathcal{A}$ 上の折り目という.

命題 4.4.3. $\mathcal{A}$ 上の全ての折り目を $c_1, c_2, \dots, c_k$ ($k \in \mathbb{N}$) と名付ける. このとき, 次が成り立つ.

$$\bigcup_{1 \leq i \leq k} c_i = \bigcup_{f \in \text{dev}\mathcal{A}} f$$

証明. (C) $x \in \bigcup_{1 \leq i \leq k} c_i$ とする. このとき, $\exists c_{i'j'} : \mathcal{A}$ 上の折り目 s.t. $x \in A_{i'} \cap A_{j'}$ が成り立つ. 命題 4.4.1

より $x \in f \cap A_{i'} \cap A_{j'}$ であるから, $x \in f$ である.

(D) $x \in \bigcup_{f \in \text{dev}\mathcal{A}} f$ とする. このとき, $\exists f \in \text{dev}\mathcal{A}$ s.t. $x \in f$ が成り立つ. f の定め方により, x はある隣り合う領域 A_i, A_j の元になる. ゆえに, $x \in f \cap A_i \cap A_j$ となり, 定義 4.4.2 から $x \in c_{ij}$ が成り立つ. $\square$

これにより, 展開された折り線全体と折り目全体が一致することが分かった.

命題 4.4.4. 仮想平坦折り紙 $\mathcal{A}$ において, c_{ij} を A_i と A_j の間の折り目とする. このとき, 次が成り立つ.

$$Fc_{ij} \cap FA_i = Fc_{ij} \cap FA_j$$

すなわち, 折り目が2つに裂けるような作用素は存在しないということである.

証明. c_{ij} の元は作用素 F により, A_i の元に定められた写像と A_j の元に定められた写像のどちらにも対応する. もし, $Fc_{ij} \cap FA_i \neq Fc_{ij} \cap FA_j$ であるならば, c_{ij} の元はこれらの鏡映変換により2つの元に分かれてしまっている. すなわち, F によって2つの元へ対応するような $x \in c_{ij}$ が存在することになってしまう, F が作用素であることに矛盾する. $\square$

折り目の状態を表す用語として, 「山折り」と「谷折り」がある. この2つについても, 鏡映変換の偶奇で定めることができる.

定義 4.4.5 (山折り, 谷折り). $\mathcal{A}$ を仮想平坦折り紙とし, c_{ij} を A_i と A_j の間の折り目 ($A_i \prec A_j$) とする.

(M) A_i の元に奇数回の鏡映変換, A_j に偶数回の鏡映変換が定まっているとき, c_{ij} を $\mathcal{A}$ 上の山折りという.

(V) A_i の元に偶数回の鏡映変換, A_j に奇数回の鏡映変換が定まっているとき, c_{ij} を $\mathcal{A}$ 上の谷折りという.

ただし, 恒等変換は偶数回の鏡映変換とする.

命題 4.4.6. 仮想平坦折り紙 $\mathcal{A}$ における $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ の任意の異なる元 A_i, A_j について, $\#\{A_i \cap A_j\} > 1$ であるとき, 次が成り立つ.

$$A_i \prec A_j \Rightarrow c_{ij} : \text{山折り または 谷折り}$$

すなわち, 重なり合う領域の間の折り目は必ず山折りか谷折りのいずれかである.

証明. 条件の A_i と A_j にどちらも偶数回の鏡映変換が定まっているとする.

偶数回の鏡映変換は回転変換を表すことに注意すると, A_i と A_j を重ねる ($FA_i^\circ \cap FA_j^\circ \neq \emptyset$ となる) ためには, 折り目 c_{ij} をずらす (すなわち $F(A_i \cap c_{ij}) \neq F(A_j \cap c_{ij})$ とする) 必要がある. これは命題 4.4.4 に矛盾する. A_i と A_j にどちらも奇数回の鏡映変換が定まっている場合も, 反転させた回転変換を表していることに注意すれば, 同様に矛盾が導かれる. ゆえに, 条件を満たす c_{ij} は山折りか谷折りでなければならない. $\square$

また重なり順が存在しない領域とその間の折り目は, 合同のまま写される.

命題 4.4.7. 仮想平坦折り紙 $\mathcal{A}$ における $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ の任意の異なる元 A_i, A_j について, $\#\{A_i \cap A_j\} > 1$ であり A_i と A_j に重なり順が存在しないとき, 次が成り立つ.

$$A_i \cup A_j \equiv FA_i \cup FA_j$$

証明. 条件と命題 4.4.4 より, A_i と A_j は境界がずれないまま鏡映変換されることになる. ゆえに, 作用素 F がその題意を満たす合同変換になっている. $\square$

定義 4.4.8 (補助折り目). 命題 4.4.7 の条件を満たす A_i と A_j の間の折り目 c_{ij} のことを補助折り目という.

最後に局所的な性質を考えるために, 次の定義を与える.

定義 4.4.9 (頂点). 仮想平坦折り紙 $\mathcal{A}$ において, 山折りまたは谷折りが交わる点を $\mathcal{A}$ の頂点という. 頂点が A の内部にあって1つだけである時, $\mathcal{A}$ は単頂点であるという.

命題 4.4.10. $\mathcal{A}$ を単頂点仮想平坦折り紙とし, この頂点を v とする. Fv の十分近くを通る FA° 上の直線を l とし, $FA^\circ - l$ の連結成分の閉包で Fv を含む方を D とする. このとき, $F^{-1}D$ は多角形となる.

証明． v が A の内点であることに注意して， $\partial FA \cup l$ を考える．このとき，この集合は 2 点集合であり，この元を a, b とすると， $F^{-1}a$ と $F^{-1}b$ は A 上の山折りまたは谷折りとなる各折り目の 1 点になる．これらを v を囲むようにして線分で繋いだ閉曲線が $F^{-1}l$ であり， v を含む連結集合が $F^{-1}D$ である． $F^{-1}D$ は線分で囲まれているから多角形となる． $\square$

実際の折り紙（単頂点のものに限る）でも，頂点付近を切った切り口は必ず多角形になることが分かる．このように，折り紙を一直線に切ってできる多角形は「一刀折り」と呼ばれている．仮想平坦折り紙では，これを次のように定義しよう．

定義 4.4.11 (一刀折り)．命題 4.4.11 における $F^{-1}D$ のことを A の直線 l による一刀折りという．

現実的な山折り，谷折りという操作を考えた場合，図 17 のように xyz 空間において xy 平面と平行な平面を，折り線を軸として z 方向に回転させて重ね合わせるという操作がイメージされる．この場合，山折りが z 方向に π 回転していると見なすと，谷折りとは z 方向に $-\pi$ 回転しているものだと見なすことができる．しかし，本論文における山折り，谷折りは $\mathbb{R}^2$ 平面の鏡映変換と半順序の関係によって定められたものであるため，このような角度構造は自然に組み込まれるものではない．

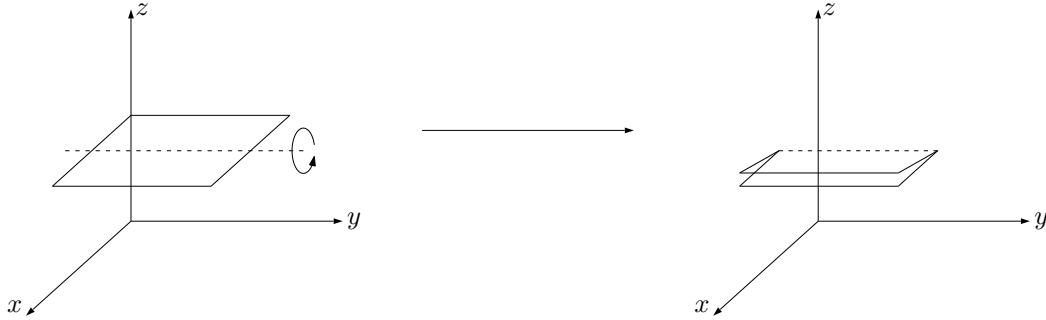


図 17: 実際の谷折りのイメージ図

そこで，山折り，谷折りを考えるにあたり，本論文では次のような角度構造を要請する．

要請． c_{ij} を A 上の A_i と A_j の間の山折りとし， Fc_{ij} 上の 1 点を c ， FA_i 上の 1 点を a ， FA_j 上の 1 点を b とする．また， ac を a と c を通る線分， bc を b と c を通る線分と定める．このとき， ac と bc が同一直線上にあるならば，その角度 ($\angle acb$) は π であると定める．また c_{ij} が谷折りのとき， ac と bc が同一直線上にあるならば，その角度 ($\angle acb$) は $-\pi$ であると定める．

また，現実的な平坦折りを考えるために，定義 4.4.11 で扱った一刀折り $F^{-1}D$ をもう一度折り畳むという操作を考えよう．一刀折り $F_0(F^{-1}D) = F^{-1}D$ から $F_1(F^{-1}D) = FF^{-1}D$ への変形 F_t を時間 $t \in [0, 1]$ での連続変形として捉える．具体的には， xy 平面上にある $F^{-1}D$ から zy 平面と平行な平面上にある $FF^{-1}D$ への連続変形を $v = Fv$ になるようにして定める（図 18 参照）．このとき，任意の時間 $t \in [0, 1)$ において， $F_t(F^{-1}D)$ の境界である閉曲線 $F_t(F^{-1}l)$ は頂点 v 周りに回転数 ± 1 を保っている（ただし，連続変形は $\mathbb{R}^3$ 空間における操作であるため， $F_t(F^{-1}l)$ の回転数とは， $F_t(F^{-1}l)$ を xy 平面に v を内部に含むように射影した閉曲線の回転数として定める．すなわち，図 18 を真上もしくは真上から少しずらした視点から見たときの回転数として考える）．ゆえに，その極限である潰れた閉曲線 $FF^{-1}l$ についても，その頂点 v 周りの回転数は ± 1 であると考えたい．このことから，本論文ではさらに次のことを要請する．

要請．仮想平坦折り紙 A 上の直線 l による一刀折りを $F^{-1}D$ とするとき， l は頂点 Fv 周りの回転数 ± 1 の閉曲線であると定める．

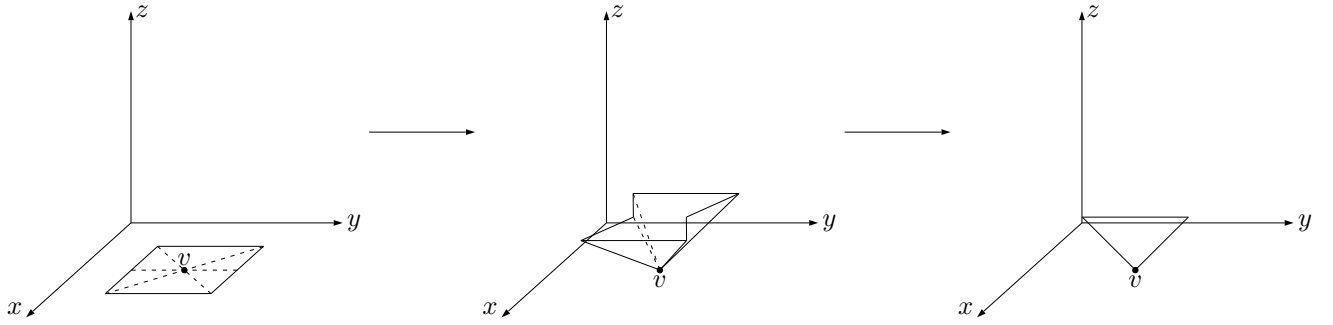
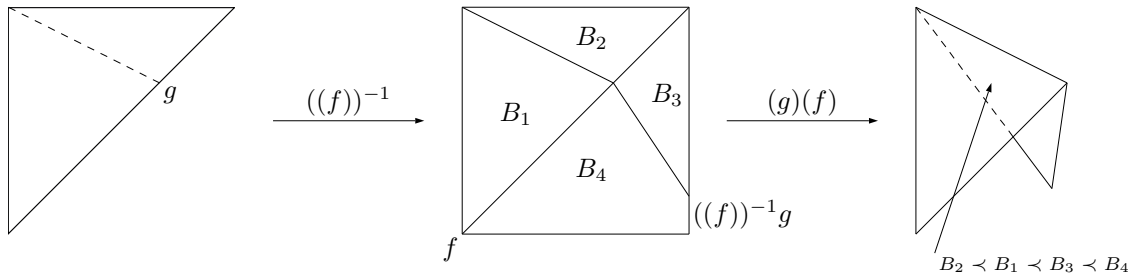


図 18: 連続変形 F_t のイメージ図

4.5 可折平坦折り紙

ここまで、平坦折り紙とは作用と半順序の組とし、これを仮想平坦折り紙として定め、これに従って山折り、谷折りを定義した。ところが、仮想平坦折り紙は現実的に作ることはできないのである。実際に、先ほど紹介した例 2 に少し手を加えてみよう。

(例 4) 例 2 の $((g)(f)A, \preceq)$ を次のように変更する。



作用素 $(g)(f)$ は次のように定められる。

$$\begin{aligned} (g)(f)x &= R_g((f)x) & (x \in B_2 \cup B_3) \\ (g)(f)x &= (f)x & (x \in B_1 \cup B_4) \end{aligned}$$

定義 4.4.5 より、 c_{ij} を B_i と B_j の間の折り目とすれば、 c_{12} は山折り、 c_{23} は谷折り、 c_{34} は谷折り、 c_{41} は谷折りである。しかし、この操作では c_{41} が破けてしまい、紙を切らない限り現実的に起こりえなくなってしまう。

このような操作を除くため、仮想平坦折り紙に以下のような制限を加える。

定義 4.5.1 (可折平坦折り紙). 仮想平坦折り紙 $\mathcal{A}$ において、 c_{ij} を A_i と A_j の間の折り目とする。次を満たす c_{ij} を非可折であるという。

$$A_i \prec^{\exists} A_k \prec A_j \text{ s.t. } \forall x \in c_{ij}, Fx \in FA_k^{\circ}$$

そうでない c_{ij} を可折といい、 $\mathcal{A}$ 上の全ての折り目が可折である時、 $\mathcal{A}$ を可折平坦折り紙という。

単頂点な可折平坦折り紙において、以下の「前川の定理」「川崎の定理」を示すことができる。

定理 4.5.2 (前川の定理). $\mathcal{A}$ を仮想平坦折り紙かつ単頂点とし、 $M = \#\{\mathcal{A} \text{ 上の山折り}\}$ 、 $V = \#\{\mathcal{A} \text{ 上の谷折り}\}$ とする。この時、次が成り立つ。

$$\mathcal{A} : \text{可折平坦折り紙} \Rightarrow M - V = \pm 2$$

注意．単頂点可折平坦折り紙においては, $M + V \geq 3$ である. 実際 $M + V \leq 2$ の場合, A の内部で山折りまたは谷折りは交わることができないので, A は単頂点にならない.

証明． A 上の全ての山折りまたは谷折りに $c_1, \dots, c_n$ と名付ける．また頂点を v とおく． A の直線 l による一刀折り $F^{-1}D$ を考える．このとき, $(F)^{-1}D$ は $c_1, \dots, c_n$ の各 1 点を頂点とする n 多角形となる．この n 多角形の境界 $(F)^{-1}l$ は頂点 v 周りで回転数 ± 1 の閉曲線となる．要請により, l も Fv 周りで回転数 ± 1 の閉曲線であると．また要請により, 山折りを通るときは π 回転, 谷折りを通るときは $-\pi$ 回転しているから, $\pi M - \pi V = \pm 2\pi$ が成り立ち, $M - V = \pm 2$ が導かれる. $\square$

系 4.5.3. 単頂点可折平坦折り紙において $M + V$ は偶数である.

証明．定理 4.5.2 より, $M - V = \pm 2$ であるから,

$$M + V = M - V + 2V = \pm 2 + 2V = 2(\pm 1 + V)$$

$\square$

定理 4.5.4 (川崎の定理). A を仮想平坦折り紙かつ単頂点であるとし, A 上の谷折り, 山折りを反時計回りに $c_1, \dots, c_{2w}$ ($w \in \mathbb{N}$) と定める．この時, 次が成り立つ.

$$A : \text{可折平坦折り紙} \Rightarrow \angle(c_1, c_2) + \angle(c_3, c_4) + \dots + \angle(c_{2w-1}, c_{2w}) = \pm \pi$$

ただし, $\angle(c_i, c_j)$ は c_i と c_j の成す角 (反時計回りを正とする) を表す.

証明．任意の領域 $A_k \in \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ について, FA_k は合同変換であるから, $\angle(Fc_i, Fc_{i+1}) = \pm \angle(c_i, c_{i+1})$ が成り立つ. また定義 4.4.5 より c_i が山折りまたは谷折りであるためには,

$$\angle(Fc_i, Fc_{i+1}) > 0 \Rightarrow \angle(Fc_{i+1}, Fc_{i+2}) < 0$$

$$\angle(Fc_i, Fc_{i+1}) < 0 \Rightarrow \angle(Fc_{i+1}, Fc_{i+2}) > 0$$

のどちらかが成立しなければならない (ただし $c_{2w+1} = c_1$ とする) .

ところで命題 4.4.4 より, c_1 から順に $c_2, c_3, \dots, c_{2w}$ を通って c_1 に戻る閉曲線 D を考えると, FD は閉曲線に保たれる. これを満たすためには, 隣り合う折り目の間の角度の総和は 0 でなければならない. すなわち,

$$\sum_{i=1}^{2w} \angle(Fc_i, Fc_{i+1}) = 0$$

が成り立つ.

よって $\sum_{i=1}^{2n} |\angle(c_i, c_{i+1})| = 2\pi$ であるから, $\angle(Fc_1, Fc_2) > 0$ と仮定すると,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2w} |\angle(c_j, c_{j+1})| &= |\angle(c_1, c_2)| + |\angle(c_2, c_3)| + \dots + |\angle(c_{2w}, c_1)| \\ &= \angle(Fc_1, Fc_2) - \angle(Fc_2, Fc_3) + \dots - \angle(Fc_{2w}, Fc_1) = 2\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2w} |\angle(c_j, c_{j+1})| + \sum_{j=1}^{2n} \angle(Fc_j, Fc_{j+1}) &= 2(\angle(Fc_1, Fc_2) + \angle(Fc_3, Fc_4) + \dots + \angle(Fc_{2w-1}, Fc_{2w})) = 2\pi \\ \angle(Fc_1, Fc_2) + \angle(Fc_3, Fc_4) + \dots + \angle(Fc_{2w-1}, Fc_{2w}) &= \pi \end{aligned}$$

$\angle(Fc_1, Fc_2) < 0$ と仮定すると, 同様にして $\angle(c_1, c_2) + \angle(c_3, c_4) + \dots + \angle(c_{2w-1}, c_{2w}) = -\pi$ が得られる. $\square$

注意．定理 4.5.2 及び定理 4.5.4 の逆はどちらも成り立たない. 実際, 例 4 は山折りと谷折りの差が 2 であるとともに, 折り目の成す鋭角の交代和が π であるが, 定義 4.5.1 を満たしていない.

4.6 折り紙同形

ある特定の折り紙作品が、例え違うサイズや違う折り方で作られたとしても、それらは「何らか」の意味で同じものであると言いたい。以下はその「何らか」を「最終的な形が相似で、重なり順が全て等しい」という意味で捉え、これを同値関係として表したものである。

定義 4.6.1 (折り紙同形). 可折平坦折り紙 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ が

$$\mathcal{A} = ((f_{m1} \cdots f_{mn_m}) \cdots (f_{11} \cdots f_{1n_1})A, \preceq)$$

$$\mathcal{B} = ((f_{l1} \cdots f_{lk_l}) \cdots (f_{11} \cdots f_{1k_1})B, \preceq)$$

と表せるとする。また、 (FO_1) によりそれぞれ領域 $A_1, A_2, \dots, A_u$, $B_1, B_2, \dots, B_v$ が定まっているとする。このとき、 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ が折り紙同形であるとは、次の条件を満たすことをいう。

- (1) $(f_{m1} \cdots f_{mn_m}) \cdots (f_{11} \cdots f_{1n_1})A \simeq (f_{l1} \cdots f_{lk_l}) \cdots (f_{11} \cdots f_{1k_1})B$
- (2) $u = v$ のとき、以下を満たす全単射写像 $\sigma: \{1, 2, \dots, u\} \rightarrow \{1, 2, \dots, u\}$ が存在する。

$$(i) A_1 \simeq B_{\sigma^{-1}(1)}, A_2 \simeq B_{\sigma^{-1}(2)}, \dots, A_u \simeq B_{\sigma^{-1}(u)}$$

$$(ii) \forall A_i, A_j \in \{A_1, A_2, \dots, A_u\}, A_i \prec A_j \Leftrightarrow B_{\sigma^{-1}(i)} \prec B_{\sigma^{-1}(j)}$$

または $\forall A_i, A_j \in \{A_1, A_2, \dots, A_u\}, A_i \prec A_j \Leftrightarrow B_{\sigma^{-1}(i)} \succ B_{\sigma^{-1}(j)}$

$u > v$ のとき、 c_{ij} が補助折り目となるような領域 A_i と A_j について、これを合わせた領域 $A_{ij} = A_i \cup A_j$ を作る。この操作を、新しく番号付けしたときに v 個の領域の列 $A_1, A_2, \dots, A_v$ ができるまで繰り返す。こうしてできる $A_1, A_2, \dots, A_v$ と $B_1, B_2, \dots, B_v$ について、(i) と (ii) を満たす全単射写像 $\sigma: \{1, 2, \dots, u\} \rightarrow \{1, 2, \dots, v\}$ が存在するものがある。

$u < v$ のとき、 $c'_{i'j'}$ が補助折り目となるような領域 $B'_{i'}$ と $B'_{j'}$ について、これを合わせた領域 $B'_{i'j'} = B'_{i'} \cup B'_{j'}$ を作る。この操作を、新しく番号付けしたときに u 個の領域の列 $B_1, B_2, \dots, B_u$ ができるまで繰り返す。こうしてできる $B_1, B_2, \dots, B_u$ と $A_1, A_2, \dots, A_u$ について、(i) と (ii) を満たす全単射写像 $\sigma: \{1, 2, \dots, u\} \rightarrow \{1, 2, \dots, u\}$ が存在するものがある。

$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ が折り紙同形であるとき、 $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ と表す。

注意 . $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ がもつ領域の個数が異なる場合に対して行っている操作は、折られていない（山折り、谷折りでない）折り目をないものと見なして数え直すという意味がある。こうした折り目がないものと見なせることは、命題 4.4.7 で論じた合同性により保証される。また、定義 4.6.1 ではどちらか一方の領域を減らして、もう片方と数を合わせるように定めているが、その代わりに両方から補助折り目を全て除いて数え直した領域について、条件を満たす写像 σ を考えても良い。ただし、補助折り目を全て除いて数え直した領域の個数が異なる場合、2 つの可折平坦折り紙は同形でないと定める。

命題 4.6.2. $\sim$ は同値関係である。

証明 . 命題 4.1.18 より、 $\simeq$ は同値関係であるから、条件 (1) と (2)(i) について反射律、対称律、推移律が成立する。また、 $P_A = (\{A_1, A_2, \dots, A_u\}, \preceq)$, $P_B = (\{B_1, B_2, \dots, B_u\}, \preceq)$ とすると、条件の写像 σ は $\{A_1, A_2, \dots, A_u\}$ から $\{B_1, B_2, \dots, B_u\}$ への順序同型写像となる。すなわち $P_A \cong P_B$ であり、命題 4.1.13 より $\cong$ は同値関係であるから、条件 (2)(ii) についても反射律、対称律、推移律が成立する。ゆえに $\sim$ は同値関係であると示される。 $\square$

定義 4.6.3 (折り紙作品). 可折平坦折り紙全体の集合 $\{\mathcal{A} \mid \mathcal{A}: \text{可折平坦折り紙}\}$ を $\mathbb{F}$ と表す。

このとき、商集合 $\mathbb{F}/\sim = \{[A] \mid A \in \mathbb{F}\}$ を折り紙作品全体といい、その各元を折り紙作品という。

具体例として，第 4.3 節で扱った仮想平坦折り紙

$$((o)(n_1n_2)(m)(l)(k_1k_2k_3)(k_1k_2k_3)(gh)(gh)(g)(f)A, \preceq)$$

を考えよう．全ての折り目が可折であることが分かるので，これは可折平坦折り紙である．この同値類

$$[((o)(n_1n_2)(m)(l)(k_1k_2k_3)(k_1k_2k_3)(gh)(gh)(g)(f)A, \preceq)]$$

を正方形で折られた折り鶴と定める．こうすることで，実際に異なる大きさの正方形から折り鶴を複数通りの折り方で作ったとしても，折り紙同形である限り，それらは正方形で折られた折り鶴という一つの折り紙作品であると表現することができる．

以上のようにして，様々な折り紙作品は可折平坦折り紙とその同値関係によって代数的に表現される．

5 おわりに

本論文では、折り紙の数学的アプローチについて考察してきた。その中で「折り線」について注目した結果として、一回折りの定理を証明でき、これを作図法として捉えた折り紙作図法が、ユークリッド作図法よりも優れた作図法であることを示すことができた。また、「折った形」について注目した結果として、仮想平坦折り紙によって折り鶴を折る各手順が表現できた他、山折りや谷折りなどの折り紙用語が定義でき、現実の折り紙に近づけるためにさらに条件を加えた可折平坦折り紙によって前川の定理および川崎の定理を示すことができた。「同じ折り紙作品とは何か」という問題についても、折り紙同形による同値類を考えることで1つの解答を与えることができた。

このようにしてみると、前者と後者は独立した内容に見える。そこで、仮想平坦折り紙に定められている作用の基となっている折り線の集合を、折り紙作図可能な直線だけに制限してみよう。すなわち、一回折りの定理に記された7つの折り方で作られた折り線だけを基準として、平坦折り紙を考えるということになる。このとき、折った後の形は、勝手に決めた直線に依存するのではなく、与えられた点や直線に依存することになる。これはまさに、我々が現実で折り紙を折る時の操作そのものである。実際に、基準となる直線を計算で求めて書き込んで折るというようなことなどはせずに、単に線と線を合わせて折ったり、そのようにして作った折り線を基にして変形することがほとんどだろう。このような結果は、もし計算機上に実装できた際に、部分的には人間らしい思考で平坦折り紙を考えさせることができることを意味している。

以上のことも含めた平坦折り紙の代数表現についての今後の展望や残された課題について次に述べる。

計算機上への実装

上述した通りである。

例外な折り方を含むような定義の修正

可折平坦折り紙は現実の平坦折り紙にかなり近いように見える。ところが、図19のような「ねじり折り」と呼ばれる技法は、仮想平坦折り紙としても表現できない。これはねじり折りに「重なり順が循環する」という性質があることが原因である。これを解消するためには、重なり順を1次元的な情報で定めるのではなく行列表示などを用いた多次元的な情報で定めなければならないだろう。なお、このねじり折りについては剛体の連続変形で折り紙を表現する「剛体折り紙」としても表すことができないことが知られている([6]pp.289-314)。他にも、想定していないような折り方が現実存在する可能性がある。その時その時において、仮想平坦折り紙には修正が求められることになるだろう。一方で、これまで示したように、折り鶴程度の難しさであれば可折平坦折り紙として表現できるという点は、1つの成果として考えられる。

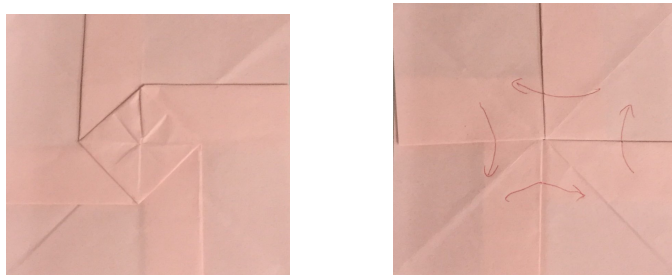


図 19: ねじり折り（左が表、右が裏）

仮想平坦折り紙, 可折平坦折り紙の応用

折り紙作品が定義されたことにより, 各折り紙作品の幾何学的性質などについて, 代数的に考察することが可能となった. 例えば川崎による「折り鶴の幾何」([5]p59-70) など, 代数的に論じることが期待できる. しかしながら, 第 4.3 節からも分かるように, 手順が多ければ多いほど情報量が膨大になる点には注意が必要である. これは平坦可折判定において NP 困難という結論が出たこともあり, 避けては通れない問題であると予想される.

また, 異なる折り方で折られた特定の折り紙作品について「どちらの方が早く折れるか」という疑問も, 解決が見込まれる. これを考えるためには, 「2 つの手順に分けられる」手順を全て分けて仮想平坦折り紙を構成し直すような, ある種「既約」とも言える条件を整備する必要がある.

非平坦な折り紙への一般化

折り紙に関連する計算幾何学上の重大な未解決問題の 1 つとして, 次のようなものがある.

問題 . 任意の凸多面体は展開図をもつか.

現在, 堀山ら [11] により解決に向けた様々なアプローチが行われているが, こうしたこともあり, 可折平坦折り紙を非平坦 (すなわち $\mathbb{R}^3$ への作用) として一般化することは非常に有意義であると考えられる. しかしながら, これは言い換えれば包括的な折り紙の定義への挑戦ということでもある. すぐに解決できる課題ではないが, 将来的な展望として最後に記しておく.

折り紙の科学的研究はまだ歴史が浅く, 大小含めて未解決な問題が山積している. 今後も引き続き, 折り紙の研究に興味を示していくとともに, 数学または数学教育に携わる多くの人々に興味を持ってもらえるよう活動していきたい. そのような意味でも, 本論文を通じて折り紙の数学的アプローチに興味を持ってもらえたら幸いである.

謝辞

修士論文の執筆および研究活動, 特に仮想平坦折り紙への着想に至るまでのプロセスについて, 指導教員である本学数学科准教授 横山知郎先生に大いなるご協力およびご指導をいただいた. また副指導教員である本学数学科教授 黒田恭史先生には, 学部生時に折り紙の研究を行うきっかけをいただいた. 御二方および本研究活動においてお世話になった全ての方々に対し, ここに感謝の意を表する.

参考文献

- [1] R.C.Alperin and R.J.Lang, “One-,Two- and Multi-fold Origami Axioms”, The Fourth International Conference on Origami in Science, Mathematics, and Education (4OSME), 2006
- [2] 和田宗士, 「折り紙の作図可能性について」, 学位論文 (兵庫教育大学), 2008 年
- [3] T.Hull, “On the mathematics of flat origamis”, Congressus Numerantium, 1994
- [4] S.Belcastro and T.Hull, “Modelling the folding of paper into three dimensions using affine transformations”, Linear Algebra and its Applications, 2002
- [5] トーマス・ハル (邦訳 川崎敏和), 「折り紙の数理と科学」, 森北出版, 2005 年
- [6] トーマス・ハル (邦訳 羽鳥公士郎), 「ドクター・ハルの折り紙数学教室」, 日本評論社, 2015 年
- [7] 野島武敏, 荻原一郎, 「折り紙の数理とその応用」, 共立出版, 2012 年

- [8] M.Bern and B.Hayes, “The complexity of flat origami”, Proceedings of the 7th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, 1996
- [9] H.Huzita, “Understanding Geometry through Origami Axioms”, The First International Conference on Origami in Education and Therapy (COET91), 1991
- [10] 羽鳥公士郎, blog. 鷺梭庵, <https://blog.ousaan.com/index.cgi/origami/20101223c.html>, 2017/12/30
アクセス
- [11] T.Horiyama, “On the Enumeration and Counting of Developments of Polyhedra”, International Conference on Mathematical Modeling and Applications 2016 (ICMMA2016), 2016