

【研究ノート】

零を必要としない位取り記数法の一例

宮崎 充弘

[Note]

An Example of Positional Notation without Zero

Mitsuhiro MIYAZAKI

Accepted June 20, 2012

抄録：今日世界中の多くで使われている位取り記数法であるところの算用数字は、歴史的には、零の発見により、その構成が可能になった。すなわち、算用数字には、零を表す記号が不可欠である。しかしながら、位取り記数法は、必ずしも零を表す記号を必要とするものではない。ところが、私の知る限り、零を表す記号を必要としない位取り記数法の存在に言及した文献は見当たらない。そこで本稿では、零を表す記号を用いない、位取り記数法の一例を提示する。

索引語：位取り記数法, 零, 0

Abstract : Arabic numerals, which is a positional notation of natural numbers, is widely used around the globe nowadays. Historically, the invention of Arabic numerals heavily depends on the discovery of zero. But this fact does not mean that every positional notation requires a symbol which express zero. And as far as I know, there is no literature which states that there is a positional notation without zero. So in this paper, we present an example of positional notation without using a symbol corresponding to 0.

Key Words : positional notation, zero, 0

1. 序

今日、我が国はもとより、世界中の多くで算用数字（アラビア数字）による記数法が用いられている。算用数字はインド記数法とも呼ばれ、その起源をインドに持ち、零の発見により発明された記数法である [3], [2]。位取り記数法とは、それぞれの単位を異なる記号を用いて表さず、位置の違いで示す記数法である [1] が、その場合、ある単位のものがないとき、その上の単位に関する表示と、下の

単位に関する表示の間に、中間の単位が存在する、すなわち、空位が存在することを、何らかの方法で示さなければならない。インド記数法は、空位に零を表す記号である 0 を書くことにより、この問題を解決している。このように、歴史的には、零の発見により、位取り記数法が発明された。

しかしながら、歴史的に、位取り記数法が発明には、零の発見が必要であったということが、位取り記数法には、0 に相当するものが不可欠であるということを意味するものではない。ところが、私の知る限り、0 に相当するものを用いない位取り記数法の存在に言及した文献は見あたらない。

そこで本稿では、0 に相当するものを用いない位取り記数法を具体的に構成することにより、0 に相当するものを必要としない位取り記数法の存在を証明し、それにより、位取り記数法には、必ずしも 0 に相当するものが必要ではないことを証明する。

なお本稿では、数を表す文字列と、数そのものを厳密に区別する必要があるが、数そのものを表すときには、算用数字を使う。算用数字が文字列の意味で使われているのか、それで表現される数を表しているのか紛らわしいときには、「文字列 35」、「35 で表現される数」などと区別するが、文脈から判断できるときには省略する。

2. 構成

この節では、零を用いない位取り記数法の例を提示する。提示にあたっては、無味乾燥ではあるが、厳密性を追求するために、数学的帰納法による定義を採用する。

定義 2.1

19 以下の正整数は、小さいものから順に一、二、三、四、五、六、七、八、九、十、十一、十二、十三、十四、十五、十六、十七、十八、十九で表す。 n は 19 より大きな整数で、 n より小さい正整数を表す文字列は、すべて定義されているとする。 n が 10 の倍数であれば、 n を 10 で割った商を表す文字列に、文字「十」を付け加えた文字列で n を表す。 n が 10 の倍数でなければ、 n を 10 で割った商を表す文字列に、文字「十」を付け加え、さらに、 n を 10 で割った余りを表す文字を付け加えた文字列で n を表す。

例 2.2

1 から 99 までは、漢数字と同じ文字列で表される。100 は十十、101 は十十一、102 は十十二、と続き、109 は十十九、110 は十一十となる。111 は十一十一、120 は二十十、199 は十九十九、200 は二十十、1000 は十十十、1001 は十十十一、1010 は十十一十、1234 は二十十三十四、2345 は二十三十四十五、6502 は六十五十二、6052 は六十十五十二と表される。

定義 2.1 で定めた正整数全体の集合から、一、二、三、四、五、六、七、八、九、十からなる文字列の集合への写像が、記数法としての必須要件をみたしていること、すなわち、異なる数には異なる文字列が対応することを、次に示す。

定理 2.3

m, n は正整数で、 $m \neq n$ であるとする。このとき、定義 2.1 で m に対応する文字列と、 n に対応する文字列は異なる。

証明

$m < n$ としてよい。 n に関する数学的帰納法で証明する。 $n \leq 19$ であれば、定義から m, n には異なった文字列に対応する。

以下 $n \geq 20$ とする。 m を 10 で割った余りが 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 であれば、 m に対応する文字列の末尾はそれぞれ十, 一, 二, 三, 四, 五, 六, 七, 八, 九である。 n についても同様なので、 m を 10 で割った余りと n を 10 で割った余りが異なれば、 m に対応する文字列と、 n に対応する文字列は異なる。そこで以下では、 m, n を 10 で割った余りは等しいとする。

$m \leq 10$ であれば、 m に対応する文字列の長さは 1 であり、 n に対応する文字列の長さは 2 以上なので、 m に対応する文字列と、 n に対応する文字列は異なる。 $11 \leq m \leq 19$ であれば、 m に対応する文字列の長さは 2 であり、 n を 10 で割った余りと m を 10 で割った余りは等しいので、 n は 10 の倍数ではなく、従って n に対応する文字列の長さは 3 以上であり、 m に対応する文字列と、 n に対応する文字列は異なる。

$m \geq 20$ とする。 m, n が 10 の倍数のときは、 m, n に対応する文字列それぞれから末尾の 1 文字を、それ以外の場合には、 m, n に対応する文字列それぞれから末尾の 2 文字をとり除いた文字列は、それぞれ、 m, n を 10 で割った商に対応する文字列である。 $m \neq n$ で、 m を 10 で割った余りと n を 10 で割った余りが等しいので、 m を 10 で割った商と n を 10 で割った商は異なる。よって、帰納法の仮定から、 m を 10 で割った商に対応する文字列と n を 10 で割った商に対応する文字列は異なる。従って、 m に対応する文字列と、 n に対応する文字列は異なる。(証明終)

3. 補遺

本稿で提示した記数法は、十進法以外でも同様に定義できる。たとえば、十進算用数字で 135 と表現される数は、八進法では二八八七、五進法では五五二五、二進法では二二二二二二二二二二となる。とくに、二桁以上の場合、底（基数）がその文字列を見ただけで判断できる。（現れる数の中で一番大きいものが底である）

参考文献

- [1] 文部科学省『小学校学習指導要領解説 算数編』東洋館出版社, 2008, 114-115
- [2] 野崎昭弘・何森仁・伊藤潤一・小沢健一『数と計算の意味がわかる』ベレ出版, 2001, 33
- [3] 吉田洋一『零の発見』岩波書店, 1939, 1-87