

ドイツ・バイエルン州の基幹学校(Hauptschule)の数学教育について

—教育目標と卒業試験問題から—

守屋誠司

植村友紀

(玉川大学 京都教育大学名誉教授) (京都教育大学教育学研究科)

On mathematics education of Hauptschule in Bayern of Germany

— The focusing on educational objectives and national examination —

Seiji MORIYA Yuki UEMURA

2010 年 11 月 30 日受理

抄録：本稿ではドイツ・バイエルン州の基幹学校(Hauptschule)の教育制度と教育内容に注目して、そこではどのように学力を保証しているのかを学習指導要領と卒業国家試験をもとに調べた。学習指導要領の教育目標は生徒らの卒業後の進路を考えて作られており、生徒らの学力を考慮した内容である。さらに、卒業国家試験は、それらの内容が理解されているかを測り、基幹学校の卒業生としての学力を保証する教育制度の一つであった。

キーワード：数学教育, 卒業国家試験, Hauptschule, ドイツ

I. はじめに

諸外国の数学教育の現状を知ることは、日本の数学教育の問題を見つけたり課題を解決したりする上で大いに参考になる。日本では、アメリカやイギリス、ドイツ、フランス、ソビエト等の数学教育が紹介されてきた。特に 1980 年以降は、アメリカの数学教育の内容が多く紹介され、学習指導要領にも影響を与えてきたと思われる。一方で、アメリカの以外の数学教育に関する情報は少なくなっている。

筆者らは、数学教育の参考とすべき国としてドイツに注目している。それは、伝統的な複線型の教育システムを継続し、さらに、卒業資格を与えることにより学力の保証を行っている点からである。ドイツは第二次世界大戦において敗戦国となりながらも、科学技術においては現在でも世界トップクラスを維持している。その要因の一つとして戦前から伝統的に続くこのドイツの教育制度にあるのではと思える。

日本も戦前は複線型であったが、戦後はアメリカ型の単線型になり今日まで続いている。さらに、優秀な生徒・学生を確保するという入学時の学力を重視する日本の入学試験制度の有効的機能も、進学率の向上と少子化によって一部の学校をのぞいて低下してしまった。近年の教育問題では、戦後のこれら教育制度上の疲労が現れているのではないかと考えられる。

さて、ドイツの学校の中でも、我々は中等教育の学校の一つである基幹学校(Hauptschule)に着目した。基幹学校は 3 種類ある中等学校のうちの一つであり、学力が低い生徒が通う学校と一般に言われている。基幹学校に進学し在籍する生徒の学力をどのように捉えて教育し、卒業時の学力保証をどのようにしているのかを調べることは、現在の日本で問題となっている学力低下と低学力生徒への対応という問題を解決するヒントになると考えたからである。

本稿では、基幹学校の学習指導要領に示された教育目標と卒業国家試験問題を調べたが、その際にバイエルン州の場合を例とした。それは、バイエルン州は戦前から続く伝統的な教育制度や教育観を持ち、ドイツ国内でも教育熱心な州と言われているからである。例えば、2003 年 PISA 学力調査の数学リテラシーにおいて、ドイツ全体の成績は 503 点で第 17 位と世界平均以下の成績であったが、バイエルン州だけを見るとドイツ国内で最も良い 533 点を取っており、それは日本の 534 点とほとんど同じであった。

Ⅱ. ドイツの教育制度

ドイツの教育制度で大きな特徴として、州ごとに独立した教育制度、学校体系の複線型、卒業試験制度の 3 点がある。それぞれを説明しよう。

まず、州ごとに独立した教育制度である。教育目標や内容に関しては、日本のように全国一律で定めるのではなく、16 ある各州が独自に定めている。国としての統一された指針は存在するが、強制力はそれほど強くなく、各州が独自の学習指導要領を作成し教育が行われている。さらに、各学校では、州が作成した学習指導要領を基本としながらも、教師の判断により扱う内容や指導時間等を比較的自由に計画して授業が行われている。そのため、隣のクラスと違う内容が指導されているというケースも少なくない。

次に、学校体系は複線型で、中等教育における学校が選択制である。ドイツの義務教育は 6 歳から始まる。入学する年の 6 月 30 日迄に満 6 歳になった子どもたちは、日本の小学校にあたる地域の公立学校である基礎学校 (Grundschule) に 9 月から入学する。この学校は一部の州をのぞき 4 年制である。そしてこの基礎学校を卒業すると公立の中等学校である、日本の中学校に相当する基幹学校、普通高校に相当する実科学学校 (Realschule)、進学校に相当するギムナジウム (Gymnasium) から選択して入学するのが一般的である。これらの学校の違いを、その卒業後の進路の違いで説明しよう。基幹学校の生徒は、卒業後すぐに職業見習いとして仕事に就きながら職業学校 (Berufsschule) に週 1, 2 日ほど通い、職業の専門性とそれにつながる基礎学力を高める。従って、基幹学校のカリキュラムでは、卒業後すぐにこのシステムに対応できるようにと配慮されている。基幹学校は主に 5 年制をとっているが、希望者は 6 年間通いさらに高度な内容を学ぶこともできる。卒業時に生徒たちは少なくとも 15 歳になっており、日本の中学校卒業生とほぼ同じ年齢である。実科学学校の生徒は卒業後に職業専門学校 (Berufsfachschule) に通い、そこを卒業した後、基幹学校卒業生に比べより専門的技術や知識が必要な職業に就く。この学校は 6 年制であり職業に関するカリキュラムが盛り込まれている。卒業時に生徒はすくなくとも 16 歳になっており、その先の職業専門学校卒業時には 18 歳または、19 歳になっており、日本の高等学校卒業生とほぼ同じ年齢である。ギムナジウムの生徒は卒業後に大学への進学を希望している。ギムナジウムは最近制度が変わり 9 年制から 8 年制となった。この学校では大学進学のために、高度な教育内容を教えている。卒業時には 19 歳または、18 歳であり、日本の進学校といわれる高等学校を卒業した生徒と同じ学力レベルである。

基礎学校の卒業時に前述した 3 種類の中等学校から一つを選択する。子どもの希望も考慮されるのだが、基本的には親と基礎学校 4 年生の時の担任の先生が、子どもの成績や親の希望をもとにしてどの種類の学校に入学させるかを決定することが多い。大まかに基幹学校、実科学学校、ギムナジウムの順で生徒の学力や教育内容のレベルは高くなっている。最近では子どもの大学進学を希望する親が多いため、ギムナジウムへの入学者数が増えてきている。なお、進学後でも、ギムナジウムから基幹学校や実科学学校に転校することができる。この逆の転校も選択できるが、実際にはかなり難しい。近年、移民としてドイツに入国したドイツ語を母国語としない親の子女が基幹学校に入学しているため、言語を良く理解できないことによる低学力化とそれに伴った生徒指導上の問題が起きている。ドイツ人の親はこの状況を嫌い、学力的に無理をしてでもレベルの上の実科学学校やギムナジウムに子女を入学させるために、実科学学校やギムナジウムにおいても低学力な生徒の存在が問題となっているという。

最後は、卒業試験制度である。基幹学校や実科学学校、ギムナジウムの卒業資格は、卒業国家試験 (注: 国家とは州のことを指す) において一定の成績を獲得することで得られる。この試験は必修教科と選択教科のすべてで実施され、それら教科のすべてで合格しなければ卒業資格を獲得できない。バイエルン州においては、州として統一した試験問題が作られ、実施されている。州によっては学校ごとに作るようになってきているところもある。この試験によって得た成績はその後の就職活動や大学進学などに大きな影響を及ぼすため、単に卒業資格を取れば良いのではなく、好成績が求められる。

Ⅲ. 数学教育の目標と内容

1. 基幹学校の数学に関する教育目標と授業方法

基幹学校での数学教育の目標は次の通りである。

数学の授業には基幹学校の生徒の一般教養に重要な寄与をするという課題がある。数学の授業は、日常生活や仕事、そして職業でのこと、ならびに、基幹学校以上の教育課程での数学的課題を克服するための基礎を作り出す。内容的には、数学としての学問、工学や情報によって形成された社会からの要求、ならびに生徒の興味や要求、そして学力や応用力などの側面を考慮に入れる。

生徒は日常生活の問題や問題提起に対して、数学的方法を用いて把握し、理解し、そして解くことについて力をつける。しかし、彼らは日常の現象を数値化することの限界にもぶつかる。算術的・代数的・幾何学的課題を解くことを通じて、生徒に計算技能や順応性、そして問題解決思考を生み出せるように、さらに空間の想像力に目覚めるようにさせたい。

授業は、自分で考えることを促し、発想の豊かさを向上させ数学的な活動の楽しさをよび起こさせる事を目指すものである。

(Lehrplan für die bayerische Hauptschule, Kapitel II.2, p.38, Aufgaben und Ziele des Faches より)

基幹学校のほとんどの生徒は卒業後に就職するために、職業に就いた時に対応できる力を形成しておくことが基幹学校における教育の第一の目標としていることが分かる。授業では「自分で考える」ようにするなど、問題解決のために数学を一人で使えることが目標となっている。なお、「限界にぶつかる」という表現は、現状の内容の理解だけで満足することなく、より高度な数学の学習を続けるようにと示唆していると思える。

学習指導要領には教育目標の後に次の授業方法に関する内容も記載されている。

基幹学校の数学の授業は帰納的方法(筆者注:生徒が内発的に数学に接するようにする事)を優先する。それは、生徒の日常世界の問題、あるいは興味を誘うような数学的問題提起から始まる。生徒の経験、体験の範囲から数字による実例を利用することにより、数の理解力が強くなり、さらに実際に生きている世界と数学との関係が明らかになる。計算の方法や解決の方法を変えてみることで、生徒たちが問題を把握することや自分ひとりで処理することの助けになる。

(Lehrplan für die bayerische Hauptschule, Kapitel II.2, p.38, Methoden より)

授業を行う際には、日常世界の問題や生徒が興味を湧かせている内容などから始めるのが大切である、また、数学の授業以外のところで困難な問題に遭遇したときに、一人でそれを処理できるような力をつけさせる指導をするよう記されているのが特徴である。

2. 各学年の各領域における教育目標

各学年には、自然数、四則演算、幾何学、項と方程式、分数、現実の中の数学など、5 単元ないし 6 単元があり、各々の単元に目標が設定されている。この目標には主に 6 つの特徴がある。

1 点目は、様々な活動を通して理解を深め、抽象概念を形成して行く必要があると、指導方法に言及している点である。ほとんどの単元で何らかの活動が盛り込まれている。特に幾何の単元ではそれが顕著に表れている。例えば第 6 学年の「直方体と立方体の体積と表面積」では表面積や体積の概念を、単位立方体による体積の測定や立体の構成面の分析によって獲得すると述べている。

2 点目は、一つの概念やイメージを形成するのに一つの方法だけではなく、様々な方法で形成するべきであるとしている。例えば第 5 学年の「幾何学上の図形と関係」において、見取り図による活動を行うことで空間概念を鍛えることができ、さらに幾何図形を頭の中で思い描く練習を通して鍛えられるとしている。

3 点目は、ドイツの幾何の目標において論証についての文言がないということである。幾何以外の単元においても説明する程度にとどまり、論証は行われない。幾何では計量計算が重要視されており、基幹学校の生徒の学力と進路を考慮すれば、厳密な数学的な論証ができるよりも正確な計量計算ができる方が必要であるとの考えからであろう。

4 点目は、3 点目とも関連しているが、計算と作図が重要視されている点である。特にその違いが表れているのが幾何についての単元である。日本の場合、中学校では論証が中心の目標となっているが、ドイツの場合には作図と計算が中心になっている。作図ではコンパスと図 1 の三角定規と定規、分度器の機能を持つゲオドライエック(Geodreieck)を使った作図を行う。計算は平面幾何では面積と周囲の長さ、立体幾何では体積と表面積、密度から重量を求めることが中心となっている。

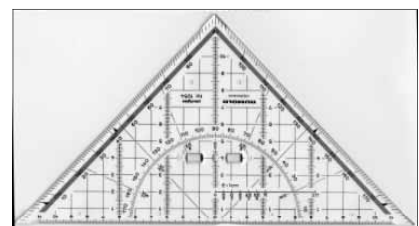


図1 Geodreieck

5 点目は、日本以上に現実の中の課題を取り扱うことを重要視している。第 5 学年、第 6 学年においては「現実の中の数学(Sachbezogene

Mathematik)」という単元がある。さらに、他の学年では、同じ単元はないが、各単元の中には日常や現実場面を取り扱うことが盛り込まれている。

6 点目は、主語の違いである。日本の小学校の学習指導要領の目標には「一できるようにする。」のように主語が児童ではなく教師となっている。しかしドイツの場合ほとんどが「生徒(Die Schüler)」になっている。生徒が授業を通して身につけるべき課題であり、生徒が自分自身で目標に向かう意味が強い。教師のための教育目標ではなく生徒のための学習目標であるという認識が強いからと考える。

3. 各学年の教育内容

各学年で扱う具体的教育内容を表 1 にまとめた。日本とそれほど変わらないが、先に述べた中学校で論証を扱わないことの他に、確率も扱われていないことがあげられる。日本以上の内容としては、複雑な一次方程式と、複雑な複合平面図形や立体図形の面積や体積の求積を扱っている点である。

表 1 基幹学校における教育内容

	第5学年(小学5年相当)	第6学年(小学6年相当)	第7学年(中学1年相当)
数と式	100 万, 10 億, 1 兆 10 倍ずつの単位の表記法 - 不等号(大小関係の表示) - 数の見積りや概数と概算(四捨五入) - 桁の違う数同士の四則演算 3 つの数での加法・減法・乗法の暗算 - 四則のそれぞれの筆算での計算方法 - 括弧のついた式の計算方法(加法と減法の交換法則) - 四則演算の計算の順序 1 次方程式(正の整数限定) - 同分母での加法減法 - 帯分数表記 - 小数の加法減法(小数以下第 3 位)	- 分数の四則演算(異分母の加法減法, 乗法, 除法) - 語彙の意味(分子, 分母, 真分数, 帯分数, 仮分数) - 小数の表記法(分数への変換, 小数点以下第 5 位) - 概数(小数, 四捨五入) - 四則のそれぞれの筆算の方法(小数) 1 次方程式(正の有理数) - 等式変形と移項の関係	- 四則計算(仮分数同士, 帯分数同士, 異分母の帯分数) - 小数から分数へ, 分数から小数への変換 - 循環小数 - 四則混合問題(小数, 分数) - 百分率(分数と小数と百分率の関係, 割合) - 負の数(整数限定) - 負を取りあつた四則演算(整数限定) 3 項以上の加法減法(計算の効率性) - 方程式(等式変形と移項, 式変形の際の説明の表記法) - 文字式の計算(2 文字以上)
図 形 (幾何)	- 立方体, 直方体, 三角柱, 円柱, 多角錐(主に三角錐・四角錐), 円錐, 球(名前の確認) - 長方形, 三角形, 円, 平行四辺形, 菱形(名前の確認) - 立体図形(頂点, 面, 辺, 側面, 底面, 上面) - 辺で構成されたモデル, 面で構成されたモデル(面体) - 立方体, 直方体の展開図 - 射影幾何学(見取り図のかき方) - 平面図形(直線, 線分, 曲線, 点) - 直角, 平行, 線対称図形, 拡大縮小の Geodreieck での作図方法 - 座標系での図形の表現方法 - 長さの単位(mm, cm, dm, m, km) - 正方形と長方形およびそれらの融合図形の面積と周囲の長さ	- 四角形, 平行四辺形, 菱形, 台形, 扇型, 等脚台形, 長方形, 正方形, 円(名前の確認) - 座標系を使った作図(正方形, 長方形, 菱形, 平行四辺形) - 円の作図 - 平行移動 - 角の意味(鋭角, 直角, 鈍角, 平角, 360°) - Geodreieck を用いた角の取り方 - 五角柱, 六角柱(説明程度) - 回転体, 見取り図のかき方) - 射影幾何 - 立方体と直方体の体積と表面積	- 二等辺三角形や正三角形の性質 - 鋭角三角形, 直角三角形, 鈍角三角形 - 四角形(菱形) - 三角形の内角の和 180° (帰納的証明) - コンパスや Geodreieck を用いた作図(三角形や四角形) - 平行四辺形の面積 - 台形, 平行四辺形, 菱形, 二等辺三角形, 正三角形の周囲の長さ - 座標系を用いての平行四辺形や三角形の表示 - 三角柱の表面積と体積 - 台形, 菱形, 扇型の面積および周囲の長さの求め方 - 複合図形の面積および周囲の長さ
関 数, 資料の 活用	- 棒グラフ(メモリの読み取り, グラフ表記法) - 資料の読み取り - 現実問題(お金, 質量, 時間, 長さ, 面積, 容積, 水, 街の中, 学校)	- 資料の読み取り - 現実問題(お金, 質量, 時間, 長さ, 面積, 容積, 水, 街の中, 学校)	- グラフ表示の有効性 - 座標系を用いて表現 - 比例関数(負の数はない, 式, グラフ, 表) - 比例算, 比例関数の計算・円グラフや棒グラフ(百分率の表示変形) - 現実問題(お金, 質量, 時間, 長さ, 面積, 容積, 水, 街の中, 学校)

	第8学年(中学2年相当)	第9学年(中学3年相当)
--	--------------	--------------

数と式	・百分率(概数), 千分率 ・百分率から千分率へ, 千分率から百分率への変換・負の数(有理数まで拡張) ・自然数, 整数, 有理数(違い, 大小関係) ・四則演算(負の数の有理数を含む) ・四則混合問題 ・交換法則, 結合法則, 分配法則 ・文字式の計算 ・1次方程式の解き方(等式変形と移項, 小数が入ったもの) ・1次方程式の解が負になる場合 ・他分野の公式と方程式を用いた問題	・百分率 ・現実問題(利息, 年利, 月利, 日利) ・指数(10の指数と指数が2のもののみ) ・10の指数(分数表記, 小数表記) ・平方根と2乗の関係, 計算 ・電卓を用いた平方根の計算方法 ・1次方程式(分数が混ざったもの) ・文字式の計算 ・他の分野との融合(幾何と物理など) ・方程式を立式すること
図形 (幾何)	・コンパスと Geodreieck を用いた作図(垂直二等分線, 垂直, 平行, 三角形, 角の二等分線, 座標系を用いたもの) ・融合図形(三角形, 平行四辺形, 台形, 円など), 不定形の面積 ・円の円周と面積(πではなく3.14使用) ・扇形の弧の長さとの面積 ・角柱や円柱 ・投影図による図形の表現方法(立体図形の推測) ・見取り図のかき方(角柱, 円柱) ・体積, 表面積(一般的な角柱, 円柱)・比を用いた文章問題	・コンパスを用いた模様作成 ・平行四辺形, 菱形, 正多角形(正五角形と正六角形が中心)の性質(論証はなし) ・比を用いた拡大縮小 ・三平方の定理(計算のみで, 証明はなし) ・複雑な複合図形の面積や表面積, 体積 ・立体図形の対角線 ・投影図と見取り図(立方体, 直方体, 角柱, 円柱, 円錐, 角錐) ・三角錐, 四角錐, 円錐(体積, 表面積) ・複合図形(角柱と角錐, 円柱と円錐など)
関数	・比例関係(整数倍) ・反比例関係(整数倍) ・比例, 反比例グラフの読み取り ・速さ, 密度, 価格, ローンに関するもの	・比例, 反比例(文章問題, 融合問題, 小数・分数倍)
資料の 活用	・百分率と千分率(グラフ, 表) ・グラフや図表の読み取りや解釈 ・現実問題(国家予算, 家計, エネルギー)	・エクセルによる利子計算 ・記述統計(テレビの視聴, エネルギー消費, 交通, 労働と仕事, 平均値) ・グラフや表の作成(適したもの)

IV. 卒業のための国家資格

基幹学校, 実科学校, ギムナジウムにはそれぞれ卒業資格を与えるための試験が存在しており, 各教科に設けられている。必修科目と選択科目があり, すべてにおいて一定以上の成績をとらなければ, 卒業資格が与えられないことは先に述べた。本章では図2の2007年度に行われたバイエルン州の数学の卒業国家試験について紹介する。なお, 基礎学校では卒業国家試験は無いが, 共通テスト程度のものであり, その成績は進路決定の重要な資料となっている。

バイエルン州では2つのタイプの試験が用意されており, その2つの合計点によって成績がつけられる。Aタイプの試験問題は, 電卓や公式集を使用せずに解く問題である。Bタイプの試験問題では, 電卓や公式集を使用して解くことが許されており, 3つの問題のグループがあり, そのうち2つのグループの問題に答えなければならない。A, Bの試験は同じ日に休憩を挟んで行われる。Aタイプは16点満点で試験時間30分間の試験であり, Bタイプの問題は32点満点の試験時間70分間の試験である。合計点数48点満点で成績4である16点以上とらなければ, 数学の卒業国家試験に合格したことにはならない。以下はAタイプ, Bタイプの各問題とその問題に対するコメントである。

49001

**QUALIFIZIERENDER
HAUPTSCHULABSCHLUSS
2007**

BESONDERE LEISTUNGSFESTSTELLUNG AM 27.06.2007
Teil A: 8.30 Uhr bis 9.00 Uhr
(Teil B: 9.10 Uhr bis 10.20 Uhr)

MATHEMATIK

Teil A

Bei Teil A der besonderen Leistungsfeststellung zum Erwerb des qualifizierenden Hauptschulabschlusses im Fach Mathematik sind Taschenrechner und Formelsammlung als Hilfsmittel nicht zugelassen.

Gesamtbewertung für Teil A und Teil B:

Platznummer (ggf. Name/Klasse): _____

Punkteverteilung:	Punkte:	Teil A:	von	16 Punkten
Note 1 ⇒ 48,0 - 41 Punkte				
Note 2 ⇒ 40,5 - 33 Punkte				
Note 3 ⇒ 32,5 - 25 Punkte				
Note 4 ⇒ 24,5 - 16 Punkte				
Note 5 ⇒ 15,5 - 8 Punkte				
Note 6 ⇒ 7,5 - 0 Punkte				

Note:

Erstkorrektor: _____

Zweitkorrektor: _____

図2 タイプAの表紙

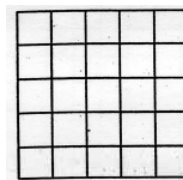
1. タイプ A の問題

問1 1 リットルあたりの値段を求める問題であるが、販売店での表示価格ラベルが示されているだけで問題文の記載はない。しかし、ドイツでは、価格ラベルに 1 リットルや 1kg あたりに換算した値段が表示されているため、何が問われているかは生徒が分かる。

20×0.5 となっているのは、0.5 リットルのアップルサイダーが 20 本入っているという意味であり、日本における掛け算とは乗数と被乗数の意味が逆となっている。また、小数点の表記も、ドイツでは「,」を使用している。



問2 右図が与えられていて、問題文には「全体の面積の 24% 分に色を塗りなさい。」と指示されている。この図はマス目が 25 個あり、全体を 100% であるとすれば、一つあたり 4 % 分になるので、6 マス分を塗りつぶせばよい。24% という、一見すると 25% とは違い、塗ることが難しいように感じられるが、正確にマス目一つ分を計算すれば塗りつぶすことができ、生徒の観察力と考察力を試している。



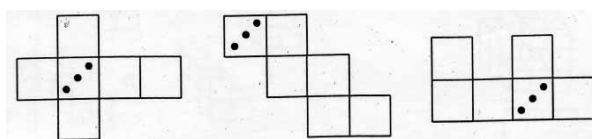
問3 数列が与えられており、空欄に当てはまる数字を答える問題である。a) は順番に差が 1 ずつ増えているので簡単だが、b) はそれぞれが $2n-1$ の 2 乗の数になっていて難しい。数列は指導されていないので一般項を求めない。差に注目して、直観や試行錯誤によって規則を見つけ出せるかを問う問題である。

a)	14	13	11	8	4	-1	
b)	1	9	25	49			

問4 不等号を答える問題であり、指数表記されている数式を小数表記へと変換するか、または小数表記されているものを指数表記へと変換できるかが評価される。例えば a) の問題であれば $1.2 \cdot 10^5$ を 0.000012 と変換するか、または、0.0012 を $1.2 \cdot 10^3$ と変換するかのどちらかを行わなければならない。仕事で使うであろう有効桁数による数値表現の理解が問われている。

a)	$1,2 \cdot 10^{-5}$		0,0012
b)	$4,2 \cdot 10^7$		$0,042 \cdot 10^9$

問5 次のような 3 つの展開図が与えられていて、「サイコロの場合には向かい合っている面の点の合計は 7 個になっている。次の立方体の展開図のどこに 4 の点をかけばよいか。かく必要があるものだけを記入せよ。」



正しい展開図を選ぶとともに点の位置も考えなければならない。まず、展開図からサイコロができてあがる様子を頭の中でイメージできるか否か、次に、どの面が平行になるか、空間における対応する面の関係を正しく把握できるかが問われている。このような情報が多く与えられていて、その中から必要なものを選択させる出題方法は参考になる。

問6 問題は右のような空欄がはいった式が示してある。この式が成り立つように空欄に数字を当てはめる問題である。係

$$4 \cdot (\square \cdot x + \square) - 4 = -12 \cdot x + 20 - 4$$

数がすべて 4 の倍数なので、4 で因数分解してしまいそうになるが、括弧と等式の性質をしっかり理解しているか評価する問題である。左辺に -4 があるが、右辺をみると同様に -4 があることから、この -4 は空欄を考える上で何の影響もないことが判断でき、右辺の -4 を除いた式を因数分解すれば左辺の式と同じ形になる。空欄は同じ数がいいるとは限らないので、それぞれの空欄に対して別の文字をおき、方程式として解くことはできない。既知の知識の中で、問題解決に有効な知識を探し出し、それを利用する力もこの計算問題においても求められている。これも、日本ではあまりみられない問題である。

問7 ノートパソコンの購入方法が 3 種類有り、どのプランで買うと一番安いかを説明する問題である。

「A のプラン…ノートパソコンの価格は 1200 ユーロだが、現金での支払いの場合 3% 引きされる。

B のプラン…ノートパソコンの価格は 1000 ユーロだが、付加価値税 19% がかかる。

C のプラン…現金で 300 ユーロ払い、残りは 8 回の分割払いで 1 回あたりの支払額は 110 ユーロである。手数料として 65 ユーロかかる。」

日常で出会う、身近な問題である。まずそれぞれのプランの意味を理解していなければならない。例えば付加価値

Angebot A	Angebot B	Angebot C
1200 € bei Barzahlung 3 % Skonto	1 000 € zuzüglich 19 % MwSt.	Anzahlung: 300 € 8 Raten zu je 110 € Bearbeitungsgebühr: 65 €

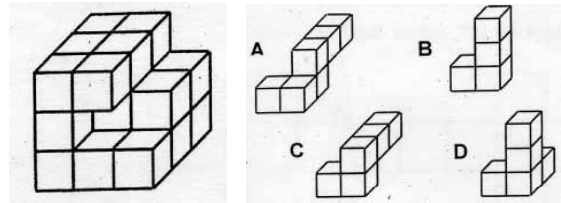
値税はどのように支払額に影響を及ぼし、どのように計算すれば良いのかということは当然知っているものとして取り扱われている。その上、それぞれを正確に計算し、その計算結果をもってどれが一番安くなるのかを「説明」しなければならない。単に計算できるだけでなく、計算の意味や計算方法、その結果の意味を第三者に正確に伝える表現力も問われている。

問8 ある生徒の成績が、6回のうち5回目までの示された表と6回分の平均点が与えら

4	2	3	1	2	?
---	---	---	---	---	---

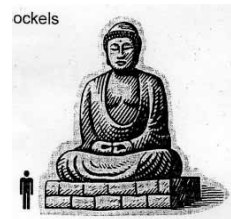
れているとき、6回目の成績を求める問題である。平均の求め方や、その意味を理解しているかどうか問われている。

問9 立方体で構成された図が掲載されている。その右側にAからDまでの図があり、「立方体になるように立体を補って完全なものにせよ。A、B、CまたはDのうちどれがぴったり当てはまるか。」



空間の中で、その構成要素を分析できるかが問われている。知能テストでみられる問題だが、日本では数学の問題として出題されることは少ない。しかし、空間の幾何をほとんど指導していない日本の中学校で、どの程度の正解率が出るかを調べてみる価値はあろう。

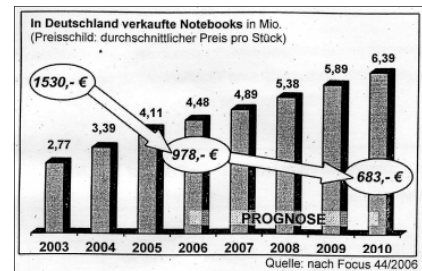
問10 右図があり、「旅行客が像の隣に立っている。土台を含めた像の高さの見積もりを説明せよ。」



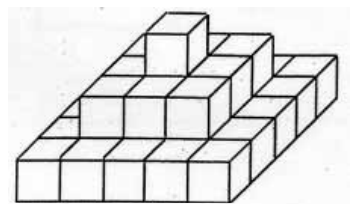
像の高さや人の高さが与えられてはおらず、人の身長を自分で想定し、それをもとに像の高さを推測する。日常では多く見かける場面であるが、必要な情報を自分で探すこの種の問題は、日本では出題される機会は少なかった。

問11 グラフが与えられ、「2003年から2006年までの間にノートパソコンの価格は何%低下したか。」

このグラフには、問われている内容を求めるのに不要な情報も載せてある。例えば、2010年の値段の予想値は必要ではないし、売り上げ台数の推移も必要ではない。このように、日常の場面では欲しい情報だけが記載されている場面は少ない。それに対応できるか、つまり、必要な情報だけを抜き出して、問われている内容に答えることができるかどうか問われている。問10や問11のように、日本でも、情報不足、情報過多の課題から、必要な情報を見つけて解答するといった出題を多くする必要があるだろう。



問12 右図が与えられており、その図の中にピラミッド型の立体を構成している立方体はいくつあるか求めさせる問題である。見えている部分はもちろんのこと、見えていない部分も形から推測し、個数を考えなければならない。これも、問9と同様に日本では試験に出題されない問題であろうが、意外にできないのではないかとと思われる。



以上のように、タイプAは基本的な問題である。日常生活で見かける、もしくは必要となるかもしれない内容に対して簡潔に答えられることが問われている。電卓や公式集を使用せずに解ける内容であり、最低限の技能と知識が求められている。しかも、単に数値を答えるだけでなく、説明させているところにも特徴がある。

2. タイプBの問題

グループ1

問1 問題は文章だけで与えられ、「ディスコ ムーンライトにおいて、お客の音楽の好みに関するアンケートを行い、結果は次のようになった。6分の1はメタルが好みであると答え、3分の1はロックを好んで聴いており、ヒップホップはロックよりも28人多く、残りの36人はテクノを選んだ。それぞれの音楽の好みには何人ずついるか。方程式を用いてこの課題を解説せよ。」

方程式の文章題で求め方も評価対象となっている。与えられている条件の理解、方程式の立て方、方程式の解き方など、様々な要素をみることができる。

問2 バイエルン州の各行政区域の人口数を示した表が与えられ、

「a) バイエルンにおける男性と女性の人口をパーセンテージで示せ。

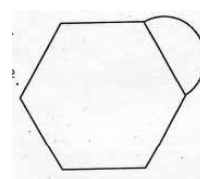
b) 円柱ダイヤグラムを用いて Schwaben の男性と女性の数を示せ。ただし、1cm を 10 万人とする。」

Regierungsbezirk	Bevölkerung		
	insgesamt	männlich	weiblich
Oberbayern	4 258 210	2 082 577	2 175 633
Niederbayern	1 195 450	588 907	606 543
Oberpfalz	1 087 930	535 211	552 719
Oberfranken	1 097 589	533 948	563 641
Mittelfranken	1 711 539	835 717	875 822
Unterfranken	1 339 592	658 231	681 361
Schwaben	1 788 158	876 156	912 002
Bayern	12 478 468	?	6 367 721

Quelle: Bayerisches Landesamt für Statistik und Datenverarbeitung

a) はパーセンテージの意味、求め方を知っているかが問われている。また、この問題のように桁数が多い計算は電卓を用いて計算する。さらに有効桁数が示されていないことから、生徒自身に有効桁数を設定させている。これにより、人口を比べるときに、どのぐらいの有効桁数が適しているのかを考える、表現することが問われている。b) では円柱ダイヤグラムというグラフを知っていて、正確に描けるかどうか問われている。

問3 右の図が与えられていて、半円の面積が 25.12dm^2 とするときの、正六角形の面積を計算する問題である。円周率は指定されておらず、問題に与えられている値から円周率が 3.14 であることを推測するか、または、前提として 3.14 であるということを知っておかなければならない。さらに、円の面積を求める公式から半径または直径を求めること、そして、その半径または直径を用いて正六角形の面積を求めることが問われている。なお、正多角形の求積公式は公式集に掲載されているので、それを参照することもできる。



問4 「マヤとフローリアンはともに職業見習いである。

a) マヤの毎月の実収入は 407.94 ユーロである。彼女の控除税率は 21.55% である。マヤの税込みの給料はいくらか。

b) フローリアンは税込みで 576 ユーロ稼いでいる。彼の給料は 2.5% 高くなる。控除税率 22.5% を用いて、彼の新しい実収入を計算せよ。」

これを解くためには控除税率の意味や仕組みを知っていなければならない。理解できていれば、計算式も簡単にできるであろう。この問題の特徴は、就職し給料を得たときに初めて払う税のことが取り扱われている点である。基幹学校の生徒たちは卒業後に職業に就き給料をもらう者が大半であるため、それに対応した問題となつていられる。しかも、税率が 21.55% と 22.5% という具体的な数値であり、所得により税率が変わるところもより現実に近い場面を設定し作られた問題であろう。

グループ 2

問1 右の方程式を解く問題である。難易度は日本高校入試レベルと同じかそれ以上である。分数式の中に小数も入っており、工夫して計算する必要がある。

$$\frac{3,5 \cdot (2x - 24)}{7} - 4 \cdot (x - 2) = \frac{5x - 138}{3}$$

また、電卓だけで計算することは困難であり、手計算で式を簡単にしなければならない。等式における性質を十分に理解し、さらに計算の効率を考え、どの項から簡単にしていくべきなのか、どのように簡単にしていくべきなのか、様々な要素が問われている問題である。

問2 図は与えられておらず、文章だけが与えられている。問題は、

「点 A(-4 | 2) と点 B(6,5 | -4) を単位 1cm の座標系にせよ。また、直線 g は両方の点を通っている。

a) 直線 g は点 s において x 軸で分けられている。点 s の座標を求めよ。

b) 点 c(6 | 1) を通り、直線 g に対して垂直な直線を描け。

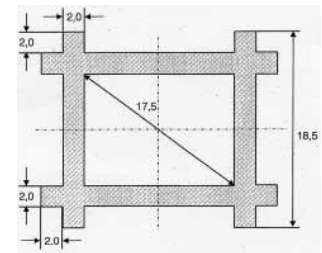
c) 点 c(6 | 1) を通り、直線 g に対して平行な直線を描け。」

グラフ用紙は与えられてはおらず、自分で座標軸等をかき、点を取り、図をかかなければならない。日本では主題されない方法であろう。まず直線 g の式が求められなければこの後の問題を解くことは難しい。直線の傾きの意味が分からなければ、垂直及び平行の線を正確に描くことはできない。特に b) は難しいであろう。式を求めさせるのではなく、その式の持つ意味を視覚化できるかが問われている。なおドイツでは点の座標の表記方法は上記のように x 座標と y 座標の間に「|」を用いて、(x 座標 | y 座標) と表す。

問3 右の図が与えられていて、色のついた部分の面積を求めるという問題である。ピタゴラスの定理を使って中

央の長方形の横の長さを求めなければならない。複雑な図形であるため、解答に工夫が必要である。長さの単位は **cm** という指定もある。

この図形は、建築資材として見かけそうな形であり、卒業後の職業を意識した問題である。日本ではまず出題されない図形であろう。



問4 文章題になっており、「バターとヨーグルトは乳製品である。

a) 50g のバターを製造するのに牛乳が 1 リットル必要である。80kg のバターを製造するのに何リットルの牛乳が必要か。

b) 1 リットルの牛乳は 1030g のヨーグルトを生み出す。1500 リットルの牛乳で作られるとき、150g ずつ容器に詰めると何個のヨーグルトができるか。」

a) では単位変換が正しく行えるかどうか問われており、g を kg に、または、kg を g に変換することが求められる。b) は全体の量から詰めることのできる数を求める問題である。これらは、日本では小学校 5 年生の割合の問題である。

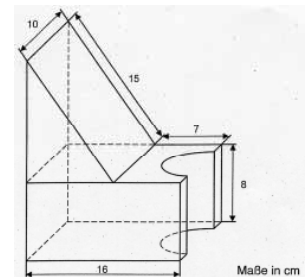
グループ 3

問1 日本の高校入試レベルか、それ以上の問題である。小数点以下

$$7,04 \cdot (x - 0,2 : 0,08) - 1,225x = -800 \cdot (-0,002) + 3x - 0,125 \cdot (1 + 8x)$$

第3位までの数が含まれており、小数の末位は統一されてはいない。計算は主に電卓で行うが、正確に数を読み取り、計算しなければ桁がずれてしまう。係数の計算は電卓を利用するが、式変形は手計算を必要とする。なおドイツでの「:」は日本の「÷」の記号にあたる。

問2 右図において、欠けている半円柱の底面の直径が 8cm であるとき次の立体の体積を求める問題である。三角柱と直方体と半円柱の複合図形である。構成されている立体を分析する、さらに、体積を求めるのに必要な値を自分で求めることが必要となる。立体の上部にある図形は、三角柱であることに気づきどの面を底面と捉え、どの辺を高さと捉えるかを考え、ピタゴラスの定理を用いて、必要な辺の長さを求めることになる。



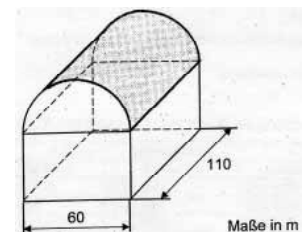
問3 文章問題となっており、「ヘラーさんはスクーターとヘルメットを買いに行きます。

a) スクーターを買うために、銀行から支払い期間 8 ヶ月間で 2100 ユーロを借りた。銀行の年利は 8,5 % である。さらに手数料として、貸付金総額の 2,75% 必要であった。彼は銀行に総額いくら払わなければならないか。

b) ヘルメットは店頭価格の 30% 引きにしてもらい、126 ユーロだけ支払った。ヘルメットの最初の店頭価格を求めよ。」

現実で起こりうる場面が設定されている。銀行から借りる場合の利息計算ができるかどうか、銀行から借りた場合の基本的な返済の仕組みを理解しているかが問われる。さらに、現実に近いように手数料まで設定してある。単に数学の力を問うだけでなく、社会に通用する知識と計算技能を持ち合わせているかも問われている。

問4 右図が与えられていて、「美術館の最上階部分は半円柱型になっている。この反った屋根は外側に特別なコーティングをする必要がある。このコーティングは 1 平方メートルあたり、労働工賃も含め 160 ユーロ費用がかかる。市議会はこのために 150 万ユーロを財政から用意した。この金額で十分に足りるだろうか。」



単に表面積を求めさせる問題ではなく、実際に起こりそうな問題設定となっている。まず、半円柱の表面積を正確に求める際に円周率は自分で設定する必要もある。さらに、表面積を求めるだけでなく、その結果を用いて単位面積あたりの労働工賃と予算が示してあり、その予算で十分かどうかを検討する必要がある。費用を求め、その費用と予算とを比較し、足りるかどうかを判断するという現実が起こりうる内容になっている。

以上がタイプ B の問題であり、日常生活に必要な知識や、それらを解決する方法が問われている問題が多い。公式は暗記の対象ではなく、その適用場面の判断や実際に計算できるかが評価される問題である。計算の正確さよりも計算方法の妥当性に重点が置かれている。% を使った割合の問題は小学校高学年程度のレベルであるが、一

元一次方程式の問題は高校入試レベルであり、成績下位の生徒を対象としている割にはレベルが高い。図形の求積では、ピタゴラスの定理の応用が到達目標となっていることがわかる。



写真1 ミュンヘンの基幹学校



写真2 過去問題による演習

卒業資格試験への対策が各学校で実施されている。写真1は2010年3月にミュンヘン校外の基幹学校を訪ねたときの試験対策の授業風景である。写真2のように担任が過去問題を用意し、生徒がペアになってそれを解いている。

V. おわりに

基幹学校は、卒業後に職業学校に通いながら職業見習いとして働くであろう生徒が通う中等学校である。教育目標は生徒の卒業後のことを前提とした内容となっている。そしてその目標が達成できているかどうかを州単位の卒業試験で判断し、卒業生の学力が一定以上であることを保証している。

日本の場合、中学校入学段階で3年後や将来の進路をはっきりと意識している生徒は少ないであろう。しかし、基幹学校のほとんどの生徒は入学の時点で進路を決めている。目標はその卒業後の進路にあわせて設定すればよい。日本のものよりも具体的で明確になりうる。取り扱う内容に関しても、ギムナジウムや実科学校に比べ学力が低い生徒が多いことを踏まえ、彼らの学力に適し、かつ、必要性のある内容を選択すればよい。これは、生徒に過重な負担をかけることなく効率的な指導ができ、生徒の学力保障にもつながる。日本では単線型のために中学生に一律の目標を設定してその到達度を評価しているが、今後はドイツのような複線型の目標と内容の導入、さらに卒業試験の導入を検討する必要がある。

参考・引用文献

1. バイエルン州の基幹学校の学習指導要領は次のホームページから閲覧できる。
<http://www.isb.bayern.de/isb/index.aspx>
 ISB - Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München-Lehrplan für die bayerische Hauptschule -
 1-1 Kapitel II.2 <http://www.isb.bayern.de/isb/download.aspx?DownloadFileID=13aa2580247de0e6b87c87c24abe3907>
 1-2 Jahrgangsstufe 5 <http://www.isb.bayern.de/isb/download.aspx?DownloadFileID=20bcd3e06f1b4865ee526c75d030147a>
 1-3 Jahrgangsstufe6 <http://www.isb.bayern.de/isb/download.aspx?DownloadFileID=15497f5621e148ad7f76d5a4a9f7c275>
 1-4 Jahrgangsstufe7 <http://www.isb.bayern.de/isb/download.aspx?DownloadFileID=867cc9703599a3ab672e67cb19986cdc>
 1-5 Jahrgangsstufe8 <http://www.isb.bayern.de/isb/download.aspx?DownloadFileID=b465c24c93879a028c04af4f7b8c1f2b>
 1-6 Jahrgangsstufe9 <http://www.isb.bayern.de/isb/download.aspx?DownloadFileID=5eae5da17f344be57fae0ee7d2ed610b>
2. マックス・プランク教育研究所研究者グループ著、天野正治・木戸裕・長島啓記訳『ドイツ教育のすべて』、東信堂、2006
3. 守屋誠司、「ドイツの文化環境と教育制度から示唆される日本の数学教育の課題」、『京都教育大学実践教育研究紀要』第7号、2007、21-30
4. 「QUALIFIZIERENDER HAUPTSCHULAB-SCHLUSS 2007 MATHEMATIK Teil A」, 「同 Teil B」