

高校生のための現代数学探訪

— シャボン膜と数学 —

小 磯 深 幸

(京都教育大学)

VISIT TO MODERN MATHEMATICS FOR HIGH SCHOOL STUDENTS — SOAP FILMS AND MATHEMATICS —

Miyuki KOISO

1999年9月30日受理

抄録：主として数学を学びつつある高校2年生後半以上の生徒・学生を読者として想定し、数学の魅力の一端を伝えることを目標に、変分問題、及びその良い例である極小曲面（これは石鹸膜として物理的に実現される）の解説を行う。

高等学校までの数学教育で学ぶ知識を有効に用いながら、数学の世界の美しさを伝えること、数学と他の学問との関わりや数学の思いがけないような実用上の応用等を紹介することにより、読者の数学への興味、未知のものへの探求心を喚起することを目指す。

キーワード：最大最小問題、極大極小問題、変分問題、極小曲面、平均曲率一定曲面

I はじめに

数学者は何故数学に魅力を感じ、数学の研究に没頭するのだろうか？ 私の場合を考えてみると、その理由は主として次の二つである。一つは、工夫や思考を重ねた後に新しい数学的事実を発見したときの感激や喜びが非常に大きく、もっともっと研究を進めていろいろなことが知りたいと思うことであり、もう一つは、そうしてみつけた数学の世界の美しさに感動し、数学と自分の両方に誇りが持てることである。

そういうわけであるから、私は、中・高校生や大学生にも、数学の魅力を知って生き生きとした気持ちで数学に取り組んでいってほしいと思う。そこで、主として数学を学びつつある高校2年生後半以上の生徒・学生を読者として想定し、数学の魅力の一端を伝えることを目標に本稿をまとめた。

さて本稿では、筆者の主たる研究対象である極小曲面及び平均曲率一定曲面と呼ばれる曲面を取り上げる。極小曲面は石鹸膜の数学的な抽象化であり、平均曲率一定曲面はシャボン玉の数学的抽象化である。実験的なことに興味のある読者は、実際に石鹸膜を作ってみたりしながら本稿をお読みなれば、より一層、これらの曲面に親しみが湧き、その性質の直感的な理解を深めることができるだろう。

本稿の構成について簡単に述べておこう。極小曲面・平均曲率一定曲面の持つ性質や、現在

研究されていることについて紹介する前に、まず第Ⅱ節では「変分問題」と呼ばれる概念について説明し、読者に問題の本質を知る手がかりを持っていただこうと思う。第Ⅲ節では、極小曲面研究の歴史的な事柄や研究課題、建築物への応用について、専門的な知識がなくても直感的に理解できる範囲に限って簡単に述べる。第Ⅳ節では、基本的な極小曲面の例をあげる。高等学校で学ぶ多項式、三角関数、指数関数、対数関数などを用いて石鹸膜の形が表されることに、読者は興味を持たれるだろう。また、これらの曲面の持つ著しい性質のいくつかを紹介する。さらに、筆者が発見した「ぎりぎり不安定な極小曲面」(つまり、それ自身は石鹸膜として実現できないが、そのどこかを少しでも削れば石鹸膜として実現できるような極小曲面)の例をあげる。最後に第Ⅴ節で、Weierstrass-Enneper (ワイエルストラス-エンネパー) の表現公式と呼ばれる公式を紹介する。これは、極小曲面を微分可能な複素関数(変数も値も複素数であるような関数)の積分を用いて表す公式の1つであり、積分を学んだ後に読んでいただければ興味を持っていただけるかと思う。この表現公式に現れる極小曲面と複素関数との深い結びつきは、読者の未知のものへの探求心を喚起するかも知れない。

以下では、数学の世界の美しさを伝えること、また、数学が物理学やその他の学問と影響し合っていたり実用上役に立ったり(時には思いもかけないようなところで)しているのだということを伝えることを意識して題材や説明の仕方を選ぶことにする。

なお、本稿は、京都府立嵯峨野高等学校京都こすもす科自然科学系統2年生を対象に、平成10年10月と平成11年10月に筆者が行った講義をもとに、加筆したものである。実際の講義では、石鹸膜や懸垂線の実演を行いながら、数学の創造的・発見的な喜びを伝えることをも目標の一つにして解説した。

Ⅱ 変分問題

読者の中に、「変分問題」「変分原理」「変分法」といった言葉を聞いたことのある方はおられるだろうか? 「変分問題」というのは、「高等学校・数学Ⅱ」で学ぶ「最大最小問題」や「極大極小問題」の無限次元版と言えるものである。例をあげてみよう。

例1. $y = x^2$ のグラフといえば、おなじみの放物線 (parabola) である。このグラフ上の点のうちで、 y 座標の値が最も小さいのはどの点で、そのときの x の値はいくらだろうか? ただし、 x はすべての実数を取り得るものとする。

この問題を解くということは、 x が実数全体を動くときの $y = x^2$ の最小値とそのときの x の値を求めるということである。ここで、 x の動く範囲 (今の場合は実数全体) を関数 $y = x^2$ の定義域と言う。任意の実数 x に対して $x^2 \geq 0$ であり、 $x = 0$ のとき、かつそのときに限り $x^2 = 0$ だから、解答は、 y の最小値は0で、そのときの x の値は0である。

別の問題を考えてみよう。

例2. $z = x^2 + y^2$ のグラフは放物面 (paraboloid) と呼ばれる曲面で、放物線 $z = x^2$ を z 軸のまわりに回転することにより得られる回転面と一致する。このグラフ上の点のうちで、 z 座標の値が最も小さいのはどの点で、そのときの (x, y) の値はいくらだろうか? ただし、

(x, y) は平面 $\mathbf{R}^2$ 全体を動く (すなわち, x も y も任意の実数の値を取り得る) ものとする。

解答は読者の演習としよう。

例 3. 平面内に与えられた相異なる 2 点 A, B に対して, これらを結ぶ曲線全部を考えよう。これらの曲線のうちで, 長さが最短のものはどのような曲線だろうか?

例 3 の答えは, A と B を結ぶ線分である。このことを証明するためには, 「曲線」や「曲線の長さ」の定義を数学的に厳密に行うことから始めなければならない。これは本稿の範囲を越えるので省略するが, 証明なしでも直感的には納得できるであろう。さて, この問題の場合は, 定義域は「点 A と点 B を結ぶ曲線の全体」であり, 関数は「曲線の長さ」である。この定義域は「無限次元の空間」である! (ちなみに, 実数全体は 1 次元である。また, 例 2 の z の定義域である平面は 2 次元である。)

例 4. 空間内の相異なる 2 点 A, B を考えよう。線分 AB の長さよりも大きい正の数を 1 つ考えて, それを L とする。 A, B を結ぶ長さ L の曲線全部を考えよう。これらの曲線のうちで, 位置エネルギーが最短のものはどのような曲線だろうか?

この問題の場合は, 関数は「曲線の位置エネルギー」である。そして, 定義域は「点 A と点 B を結ぶ長さ L の曲線全体」であり, 無限次元である。答えは, 長さ L の伸び縮みしない紐をその両端がちょうど A, B の位置にくるようにして垂らすことによって, 物理的に実現される。実験ではもちろん誤差が出てしまうが, 数学的には, この答えが次のような曲線であることが, 厳密に証明される。

例 4 の解答を与える曲線. 点 A, B を含む鉛直面を考え, これに, x 軸と y 軸を, y 軸が鉛直方向で, y 軸の正の向きが高さが高くなる向きになるようにとる。このとき, 例 3 の解答を与える曲線は

$$y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$$

のグラフとなる。この曲線は, 懸垂線 (catenary) と呼ばれている (図 1)。ただしここで, a は, 点 A, B と長さ L によって決まる正の定数で, e はだいたい次のような値の定数である。

$$2.71828182845904523536 \dots$$

(e の厳密な定義やその著しい性質については「高等学校・数学Ⅲ」で学ぶ。)

次の「参考」は, 「高等学校・数学Ⅲ」で微分積分を学んだ後に見ていただくと良いだろう。

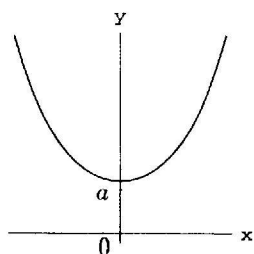


図1 懸垂線



図2 サイクロイド

参考. 例4の解答と同様に, 鉛直面を xy 平面と考えたとき, 関数 $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) のグラフの形の紐の位置エネルギーは

$$\int_a^b f(x) \sqrt{f'(x)^2 + 1} dx$$

で与えられる。

なお, 重いゴム紐 (つまり, よく伸びる紐) の両端を持って垂らしたときに, この紐がとる形は放物線になることが数学的に示される。(このことの数学的な証明や変分問題のやさしい解説が (と言っても微分積分を使うが) 参考文献1) にある。) 例4は伸びない紐の問題に対応していたことに注意しよう。

「高等学校・数学Ⅲ」の教科書にもしばしば出てくる曲線であるサイクロイドについても触れておこう。

例5. 空間内の異なる2点 A, B を考えよう。ただし, A は B よりも, 高い位置にあるものとする。このとき, 点 A から点 B に至るいろいろな形の坂道 (曲線) を考えよう。そして, それらの曲線に沿って, 点 A から点 B まで物が摩擦なしに滑り降りていくさまを想像しよう。これらの曲線全部のうちで, A から B まで物が滑り降りていくために要する時間が最短のものはどのような形の曲線だろうか?

この例では, 関数は「点 A から点 B まで物が摩擦なしに滑り降りていくために要する時間」である。定義域は「点 A と点 B を結ぶ曲線全体」であり, 無限次元である。答えはサイクロイドの一部である。もっとも, 高等学校の教科書によく出てくるサイクロイドを上下さかさまにしたものの一部と言ったほうがわかりやすいだろうか。例5の答えのサイクロイドは, 正の定数 a と媒介変数 t を用いて, 次のように表示される。

$$(2-1) \quad x = a(t - \sin t), \quad y = a(\cos t + 1)$$

つまり, t が1つの実数の値をとれば, (2-1) によって x と y の値が定まり, 平面上の1点 (x, y) が定まる。 t が実数の区間を動いていくときの, (x, y) の軌跡は xy 平面上の曲線となり, これがサイクロイドと呼ばれる曲線なのである (図2)。お寺や神社の屋根は, しばしば (たいてい? 全部?) サイクロイドの形に作られるという。つまり, 雨水ができるだけ早く

屋根から流れ落ちてくれるように、というわけである。なお、サイクロイドやその仲間たちの持つ興味深い性質については、参考文献2), 3) にやさしい解説がある。

さて、例3～5のように、無限次元の空間上で定義された関数の最大値・最小値、極大値・極小値を求める問題を変分問題と言う。極大(小)値というのは、その近くだけで考えれば最大(小)値になっているような値のことである。次のような例を考えるとわかりやすいだろう。

例6.

$$(2-2) \quad y = 2x^3 + 3x^2 - 12x, \quad -\infty < x < \infty$$

のグラフは図3のようになる。(x のいくつかの具体的な値に対する y の値を計算して、 y の値の増減表を書いてみれば、グラフのだいたいの形がわかるだろう。このような関数のグラフについての詳しいことは、「高等学校・数学Ⅱ」の微分法で学ぶ。) (2-2) は、いくらでも小さい値をとることができるし、また、いくらでも大きい値をとることができるので、最大値も最小値もない。しかしながら、 $x = -2$ で極大値 20 をとり、 $x = 1$ で極小値 -7 をとる。

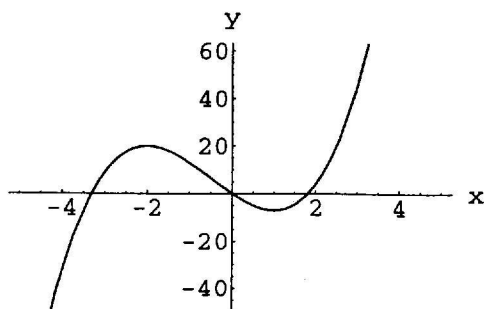


図3

例7. 半径 $r(>0)$ の球 B の表面(球面と言う)を考えて、これを S で表そう。 S 上の相異なる2点 P, Q を考える。 P と Q を結ぶ S 上の曲線のうちで長さが最短となるのはどのような曲線だろうか? 2つの場合に分けて考えよう。

Case 1. P と Q が、 B の中心に関して互いに対称の位置にあるとき。

Case 2. Case 1 でないとき。

まず Case 1 では、最短線は P と Q を結ぶ大円弧で、これは無数にたくさんある。

Case 2 では、 P と Q を結ぶ大円弧はちょうど2つあるが、最短線はこれらのうちの短い方である。長い方の大円弧は、長さが最小ではないが、極小になっている。(球面 S の大円とは、球 B の中心を通る平面で S を切ったときの切り口のことである。ここでは、大円の一部のことを大円弧と呼んでいる。)

さて、自然界のものは、たいてい、何らかのエネルギーを最小または極小にするような形をし

ているだろう、というのが「変分原理」と呼ばれるものである。たとえば、上の例4がそうである。また、光が点Aから点Bまで進むとき、その道筋は、要する時間が極小になるようなものになっている。さらに、これから取り上げる石鹸膜やシャボン玉は、面積が極小の形をしている。

例8. 空間内に1つの単一閉曲線Cを考えよう。単一閉曲線というのは自分自身と交わらない閉曲線のことである。Cで張られる（即ち、Cを境界とする）曲面すべての中で面積最小または極小のものをみつけるという問題を考えよう。「面積極小」というのは、お互いに近い曲面だけを考えれば面積が最小になっているということである。面積極小の曲面は安定な極小曲面と呼ばれている。（もっと一般に、曲面に対してその面積を対応させるということ関数とみなしたときに、その「微分」が0であるような曲面を極小曲面という。）

安定な極小曲面は、石鹸膜によって物理的に実現される。針金で枠を作り、それに、やはり針金で把手を付ける。把手を持って石鹸液の中に浸してから引き上げると、針金の枠に石鹸の膜が張る。石鹸膜は非常に薄いのでその重さを無視することにすれば、表面張力の作用によって、石鹸膜は（少なくともそれに近い曲面と比べて）できるだけ面積が小さくなるような形に張る。したがって、安定な極小曲面が実現される。

なお、中に包まれる体積が一定であるような曲面の中で、面積が極小であるようなもの（厳密には、面積の「微分」が0であるような曲面）が平均曲率一定曲面と呼ばれるものである。したがって、平均曲率一定曲面は、シャボン玉によって実現される。

Ⅲ 極小曲面

図4のような針金枠にはどのような石鹸膜が張るだろうか？



図4

実際に石鹸膜を作って、予想が合っているかどうかを確かめると興味深い。だいたいこの形の絵がp.66（図6）にあるので参照していただきたい。

19世紀後半にベルギーの物理学者 Plateau（プラトー）は石鹸膜の実験を数多く行うことにより、極小曲面の持ついろいろな性質を調べた。このことにちなんで、与えられた枠で張られる極小曲面をみつけるという問題は Plateau 問題と呼ばれている。

あらかじめ与えられた閉曲線に対して、それで張られる極小曲面が存在することを、初めて数学的に証明したのは、J.Douglas（ダグラス）と T.Radó（ラドー）で、1930年のことであ

る。Douglasはこの研究により、第1回のフィールズ賞を受賞した。

さて、極小曲面・平均曲率一定曲面は、1762年にフランスの数学者 Lagrange (ラグランジュ) が彼の論文の中に「与えられた1つの閉曲線に対し、これを境界にもつ曲面全体の中で面積最小のものをみつけたい」と書いて以来、現在に至るまで多くの数学者達を魅了し続けてきた。もちろんこれらの曲面は、単にその直感的イメージのつかみやすさだけから数学の研究対象として興味を持たれているのではない。これらの曲面は、問題の自然さから現れるさまざまな著しい性質を持つと共に、曲面全体としてとらえたときにも美しい構造を持つ。また、極小曲面・平均曲率一定曲面は変分問題の良い例であり、これらを研究する方法を開発することは、もっと一般の変分問題研究のための新しい理論の発見につながる。さらに、これらの数学概念にはさまざまな重要な数学上の応用があり、また一方では、建築に用いられるなど実用上の応用もある。こういったさまざまな理由により、極小曲面・平均曲率一定曲面は、古典的な問題でありながら、現在もお多くの数学者達によって活発に研究されているのである。近年は、コンピューターグラフィックスが、極小曲面・平均曲率一定曲面の直感的な理解や、それらの持つ性質の予想を立てるのに役立っていることも付け加えておこう。

では、極小曲面について、どのような数学的な問題が研究されているのだろうか？ いくつかの研究課題をあげてみよう。1つの枠を与えたとき、その枠で張られる極小曲面は何種類存在するのだろうか？ 極小曲面が安定であるか安定でないか（石鹸膜として実現できるかどうか）は、どのようにして判定できるのだろうか？ 枠の与え方から極小曲面の位相型（表裏が決まるかどうか、穴があいているかどうか、など曲面を連続的に変形させても変わらない性質）がどの程度決まるのだろうか？ 2つ、3つ、・・・と複数個の曲線から成る枠を考えると、それで張られる極小曲面はいつも存在するのだろうか？ n 次元空間の中で考えるとどのようなことが言えるのだろうか？ 今までに知られていないような数学的な性質を持つ極小曲面の例がもっとみつかるだろうか？ とまだまだ未解決の問題がたくさん存在し、数学者達の極小曲面に対する興味は尽きない。

なお、石鹸膜を作る実験をどんなにたくさん行っても、極小曲面の持つ何らかの性質を証明したことにはならないことに注意しよう。たとえば、いろいろな枠を針金で作って石鹸膜を張らせたとしても、「すべての閉曲線に対して、それで張られる極小曲面が存在する」ことを証明したことにはならない。なぜなら、「すべての」閉曲線の枠について実験することなど不可能なのだから。

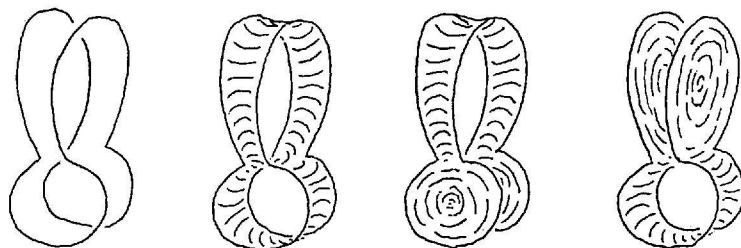


図5 3種類の石鹸膜を張る枠

さて、次の節で極小曲面のいろいろな例をあげるが、この節を締めくくるに当たって、極小曲面の実用上の応用について少し述べておこう。与えられた枠に対して、面積ができるだけ小さくなるような曲面は構造的に安定であり、形も美しく、しかもコストも安くつく。そしてそういった利点がしばしば建築に利用される。たとえば、ドイツの建築家 F. オットーは、建物の屋根をいくつかの極小曲面を組み合わせた形に作っている。たとえば、1967年のモントリオール万国博覧会でのドイツ・パビリオンや1972年のミュンヘンオリンピックのスタジアムの屋根がそうである。著作権の問題があるので写真が載せられないのが残念だが、参考文献だけでもあげておこう。S.Hildebrandt (ヒルデブランドト) と A.Tromba (トロンバ) 著・小川泰 他 訳の「形の法則——自然界の形とパターン」(東京化学同人出版, 1994年) には、これらの屋根の写真が掲載されているが、それだけではなく、多くの写真や絵を用いて、主として自然界に見られる極小値を与えるものたちの解説を行っており、大変楽しい本である。

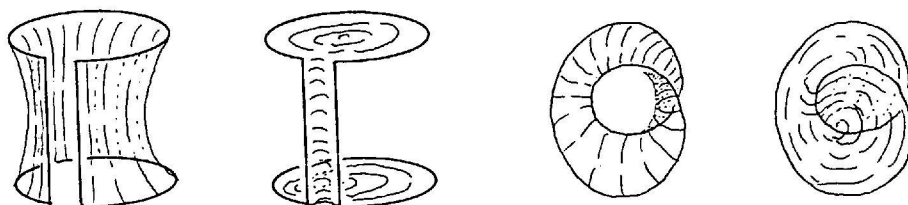


図6 同じ枠を張る2種類の石鹸膜

IV 極小曲面の例

極小曲面の最も簡単な例は平面である。

以下にあげる曲面の方程式は少し難しいかも知れないが、高等学校で学ぶいろいろな関数を用いて極小曲面が表現できるのだということは興味深いことであると思われるし、また、少なくとも、それらの式とグラフを鑑賞していただくことはできるだろう。

$$(4-1) \quad \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{a}{2}(e^{z/a} + e^{-z/a})$$

によって定義される極小曲面は懸垂曲面と呼ばれており、これは xz 平面上の懸垂線

$$(4-2) \quad x = \frac{a}{2}(e^{z/a} + e^{-z/a})$$

を z 軸のまわりに回転させることにより得られる回転面である(図7)。懸垂曲面が極小曲面であることは、18世紀後半に Euler (オイラー) によって証明された。

極小曲面であって回転面であるものは懸垂曲面だけであることが証明できる。懸垂線は放物線を z 軸に沿ってころがしたときの、放物線の焦点の軌跡として得られるという著しい性質を持っている。また、密度一様な糸の両端を支えて重力の場につり下げるとき糸がとる形がまさに懸垂線であるという興味深い性質については、すでに、第II節で述べた。

なお、楕円(円も含む)、または、双曲線を直線に沿ってころがしたときの焦点の軌跡から

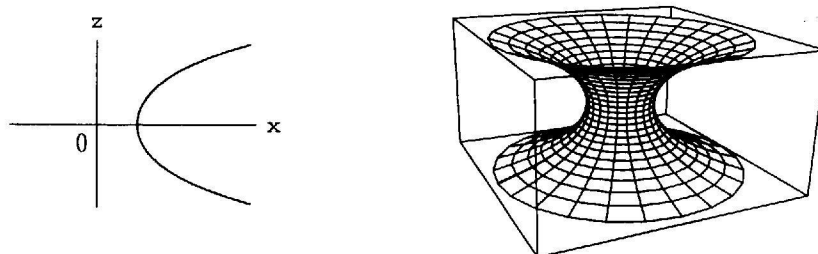


図7 懸垂線と懸垂曲面

得られる回転面は平均曲率一定 ($\neq 0$) になっている。図8はそれらの曲面の母線を表している。すなわち、楕円の焦点の軌跡が undulary, 双曲線の焦点の軌跡が nodary であり、それらを x 軸のまわりに回転させることにより得られる回転面は、それぞれ unduloid, nodoid と呼ばれ、どちらも平均曲率が一定 ($\neq 0$)、つまりシャボン玉で実現されるのである。

平均曲率一定 ($\neq 0$) の回転面はこれらと球面だけであることも証明される。ずいぶん数学的にうまくいっていると、読者の皆さんも思われるのではないだろうか？ たいていの数学者は、意味のある良い問題を考えると、必ずこういった美しい構造や性質が現れると信じている。

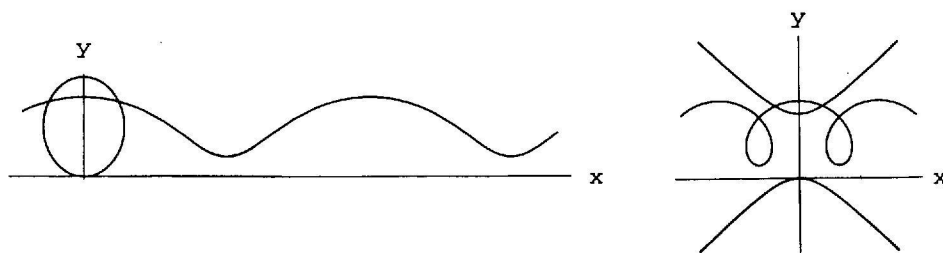


図8 undulary と nodary

さて、極小曲面の例にもどろう。

$$(4-3) \quad x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = kv \quad (k: \text{定数})$$

で定義される極小曲面は常螺旋面と呼ばれており、螺旋階段のような形をしている(図9)。図10のような針金枠を作って石鹼液に浸して引き上げると、常螺旋面に近い形の石鹼膜が得られる。実際に作ってみると非常に美しく、感激ものである。ところで、常螺旋面が極小曲面であることは、1776年に Meusnier (ムーニエ) によって証明された。極小曲面であるという性質を保ったまま、しかも伸び縮みさせずに、常螺旋面を連続的に変形させることにより懸垂面が得られるという興味深い事実が知られている。

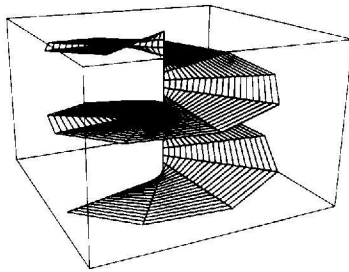


図9 常螺旋面

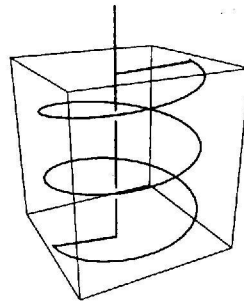


図10

$$z = \log_e \left(\frac{\cos y}{\cos x} \right)$$

と、 xy 平面上で定義された関数のグラフの形で表示される極小曲面は、Scherk（シャーク）の極小曲面と呼ばれており、Scherk によって 1830年頃に発見された（図11）。

$$x = u - \frac{u^3}{3} + uv^2, \quad y = -v + \frac{v^3}{3} - u^2v, \quad z = u^2 - v^2$$

で与えられる極小曲面は、Enneper（エンネパー）の極小曲面と呼ばれており、Enneper によって発見された（図12）。

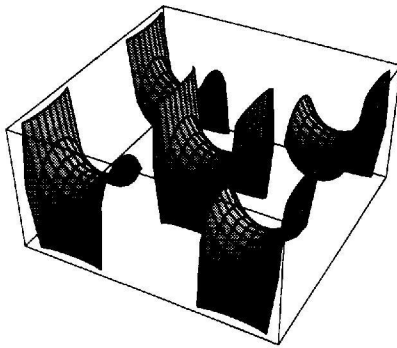


図11 シャークの極小曲面

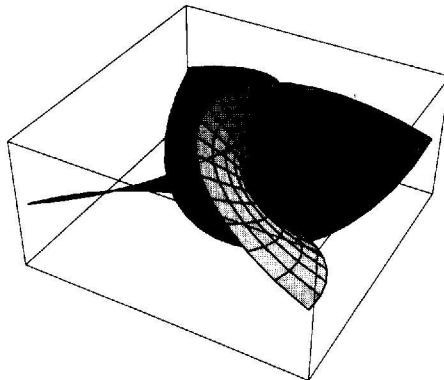


図12 エンネパーの極小曲面

では、私が発見した（1984年、参考文献4））ぎりぎり不安定な極小曲面の例をあげておこう。これは極小曲面ではあるが、面積極小ではないため、石鹸膜としては実現できない。しかしながら、その端をどちらからでもよいから少しでも削ると安定（面積極小）となり、石鹸膜によって実現できるという著しい性質を持っている。

これは

$$x = u \cos v + \frac{1}{4}u^2 \cos(2v) - \frac{1}{3}u^3 \cos(3v) - \frac{1}{8}u^4 \cos(4v)$$

$$y = -u \sin v - \frac{1}{4}u^2 \sin(2v) - \frac{1}{3}u^3 \sin(3v) - \frac{1}{8}u^4 \sin(4v)$$

$$z = u^2 \cos(2v) + \frac{1}{3}u^3 \cos(3v)$$

$$0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi$$

によって定義される (図13)。

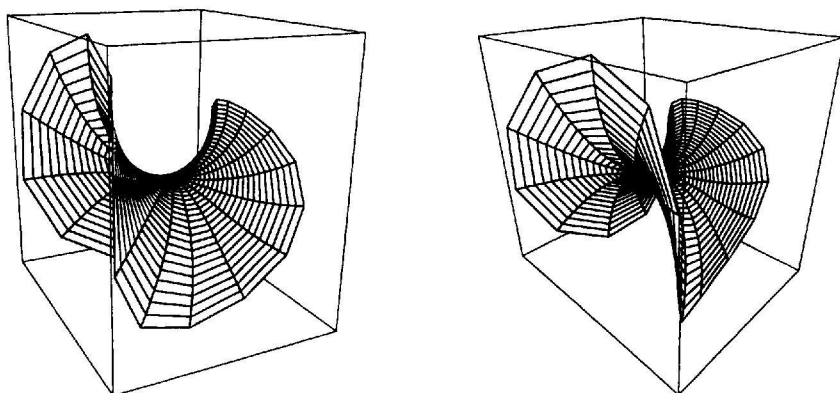


図13 ぎりぎり不安定な極小曲面

V Weierstrass-Enneper の表現公式

最後に、参考として、Weierstrass-Enneper (ワイエルストラスーエンネパー) の表現公式と呼ばれているものを紹介しよう。積分を学んだ後に読んでいただければ、興味を持っていただけるかと思う。

極小曲面は複素数の関数と関係が深く、極小曲面を複素数の関数を用いて表現した公式がいくつか知られている。それらの中で、現在最もよく使われている表現公式が Weierstrass-Enneper の表現公式である。この公式を紹介するためには、複素関数と呼ばれるものの微分積分について説明しておく必要がある。定義域も値域も複素数の集合 (複素平面の部分集合) であるような写像を複素関数と呼ぶ。簡単のために、複素平面全体で定義された複素関数 $f(z)$ について説明しよう。 $f(z)$ が $z = z_0$ で微分可能であるとは、 $z \neq z_0$ が z_0 に限りなく近づくときに、

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

がある一定の複素数 α に限りなく近づくときをいう。さらに、この値 α を $f(z)$ の $z = z_0$ における微分係数といって、 $f'(z_0)$ で表す。すなわち、実関数の微分の定義と同じように、複素関数の微分も定義されるのである。しかしながら、複素変数 z が複素数 z_0 に近づく近づき方の自由度が、実変数 x が実数 x_0 に近づく近づき方の自由度よりも大きい (前者は2次元、後者

は1次元である) ため、複素関数の微分可能性の方が強い条件になっている。そのおかげで、微分可能な複素関数は非常に良い性質を持つ。したがって、下に述べるように、そういう関数を用いて極小曲面が表せるということは、極小曲面もまた、とても良い性質を持っているということを示している。

また、微分可能な複素関数の「積分」が定義されるが、その説明は容易ではない。そこでここでは、次の二点だけを述べておこう。複素平面全体で定義された複素関数 $f(z)$, $F(z)$ が $F'(z) = f(z)$ をみたすならば、

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z) dz = F(\beta) - F(\alpha)$$

が成立する。ここで、 α, β は任意の複素数である。また、例えば

$$\frac{dz^n}{dz} = nz^{n-1}$$

が成り立つ。

さて、極小曲面 (x, y, z) は (臍点と呼ばれる特別な点を除き) (必要ならば座標軸をとりかえることにより)、微分可能な複素数値関数 $f(w)$ を用いて (変数を z ではなく、 w で表している) 次のように表される:

$$(5-1) \quad \begin{cases} x = \operatorname{Re} \int_{w_0}^w (1-w^2)f(w)dw, \\ y = \operatorname{Re} \int_{w_0}^w i(1+w^2)f(w)dw, \\ z = \operatorname{Re} \int_{w_0}^w 2wf(w)dw \end{cases}$$

ただし一般に、複素数 $\zeta = \xi + i\eta$ の実部 ξ を $\operatorname{Re}\zeta$ で表す。この表現公式 (5-1) は Enneper (1864年) と Weierstrass (1866年) によって互いに独立に導き出され、Weierstrass-Enneper の表現公式と呼ばれている。

複素関数 $f(w)$ を具体的に与えて Weierstrass-Enneper の表現公式を用いることにより、極小曲面の具体例をいくらかでも得ることができる。これはすごいことで、例えば、シャボン玉の数学的抽象化である平均曲率一定曲面ですらこのようにうまくはいかない。

さて、 $f(w)$ に具体的な関数をあてはめてみよう。

$f(w) = 1$ は $f(w)$ の例としては最も簡単なものであるが、これは Enneper の極小曲面を与える。

$f(w) = k/2w^2$ (k は実数) は懸垂曲面を与える。

$f(w) = ik/2w^2$ (k は実数) は常螺旋面を与える。

$f(w) = 2/(1-w^4)$ は Scherk の極小曲面を与える。

$f(w) = (1-14w^4+w^8)^{-1/2}$ は Schwarz (シュワルツ) と Riemann (リーマン) によって発見された空間四辺形で張られる極小曲面を与える。これはどんな形の曲面になっているだろうか? 実際に空間四辺形の形の針金枠を作って石鹸膜を作ってみるとよい。

現在でもなお、Weierstrass-Enneper の表現公式は、極小曲面の一般的な性質の研究に用いられる一方で、著しい性質を持つ極小曲面の新しい例の構成に利用されている。とりわけ、極小曲面の具体例の構成に、この公式は欠くことができない。

参考文献

- 1) 小磯憲史 (1999) : 変分, 数学のたのしみ no.16 (日本評論社), 75-85
- 2) 小磯深幸 (1998) : サイクロイドとその仲間たち, 京都教育大学教育実践研究年報 14, 135-150
- 3) 小磯深幸 (1999) : サイクロイドの教材化, 京都教育大学教育実践研究年報 15, 77-88
- 4) Miyuki koiso (1984) : On the stability of minimal surfaces in $\mathbf{R}^3$, J. Math. Soc. Japan 36, 523-541