

サイクロイドの教材化

小 磯 深 幸

(京都教育大学)

CYCLOIDS AS TEACHING MATERIALS

Miyuki KOISO

1998年9月30日受理

抄録：サイクロイドとその仲間達のもつ興味深い性質を専門的な知識を用いることなしに証明し、高等学校・数学Ⅲの「微分法」ならびに数学Cの「いろいろな曲線」における発展的な教材として提供することを目的とする。即ち、内サイクロイドまたは外サイクロイドの極限としてサイクロイドが得られること、および、デルトロイド、アステロイド、腎臓形（2尖点外サイクロイド）のもつ接線的な性質を高等学校・数学Ⅲの「微分法」までの知識を前提として証明する。

キーワード：サイクロイド、デルトロイド、アステロイド、2尖点外サイクロイド

I はじめに

与えられた直線 l に接しながら1つの円 C_1 が滑らないで転がるとき、 C_1 上の1つの固定点が描く曲線をサイクロイドという。与えられた円 C_0 に接しながら円 C_1 が C_0 の内側を滑らないで転がるとき、 C_1 上の1つの固定点が描く曲線を内サイクロイドという。円 C_1 が C_0 の外側を滑らないで転がるとき、 C_1 上の1つの固定点が描く曲線を外サイクロイドという。これらはすべて輪転曲線と呼ばれるものの仲間である。以下、サイクロイド、内サイクロイド、外サイクロイドを総称してサイクロイドの仲間達と呼ぶことにしよう。

サイクロイドの仲間達はすべて三角関係を用いて簡単に表示される。そのため、高等学校・数学Ⅲの「微分法」「積分法」における曲線の接線や長さを求めるための教材として、また、数学Cの「いろいろな曲線」において曲線の媒介変数表示の例やコンピューターで曲線を描くプログラムを作る例としてしばしば取り上げられている。

ところで、サイクロイドの仲間達は数学的に興味深いさまざまな性質をもっている。たとえば内サイクロイドの仲間であるデルトロイドとアステロイドは著しい接線の性質をもっている（定理1、2）し、外サイクロイドの1つである腎臓形もまた特別な光学的あるいは接線の性質をもっている（定理3）。これらの性質については、高等学校教科書の中には図示によって紹介しているものも見られるが、数学的に納得できる形の説明が行われているものはいくつかない。本稿は、これらの興味深い性質の証明を高校生にも十分理解できる形で与え、高等学校数学の発展的な教材として提供することを目的とする。ただ、残念ながら本稿で述べる証明は発見的な証明方法とは言い難い。実際の授業で用いる場合には、可能ならば、コンピューター・

グラフィックスを用いるなどしてサイクロイドの仲間達のもつ接線の性質を予測し、その上で数学的な証明を与えることが望ましいと考える。具体例に関する作業もしくは計算を通して数学的な法則を予測し、その後で数学的に厳密な証明を与えることは、数学の研究のあり方としても正しい方法である。

なお、これらの接線の性質のいくつかは包絡線概念を用いることにより統一的に説明できる。しかしながらこの方法は偏微分概念を必要とし、高等学校教材としては不適當である。この方法については参考文献2)で述べたので参照していただきたい。また、サイクロイドは等時曲線、最短降下線と呼ばれる物理的性質をもっているが、これについても、参考文献2)の§IV, p.141を参照していただきたい。

なお、デルトロイドとアステロイドの接線の性質については文献1)にも略証が記されている。また、腎臓形の接線の性質については文献3), pp.301-302に初等幾何的な証明がある。本稿での証明は解析幾何ないしは微分幾何的な方法である。

以下の各節の概要を述べよう。第Ⅱ節では本稿で用いる記号の説明を行う。第Ⅲ節ではサイクロイド、内サイクロイド、外サイクロイドの表示式を与える。さらに、内サイクロイドまたは外サイクロイドの極限としてサイクロイドが得られることを証明する。このことは文献2)においても証明したが、本稿においては、パラメーターの取り方に統一性をもたせることにより、2)よりも自然な移行が得られる。第Ⅳ節ではデルトロイドのもつ接線の性質の証明を行う。第Ⅴ節ではアステロイドのもつ接線の性質の証明を行う。第Ⅵ節では腎臓形(2尖点外サイクロイド)のもつ光学的・接線の性質を取り上げ、その証明を行う。

なお、サイクロイドの仲間達の尖点における厳密な議論は高等学校数学の範囲を越えると思われるため省略する。

Ⅱ 本稿における記号について

以下ではユークリッド平面(平面に普通の距離を入れたもの)に直交座標系 (x, y) を考えたものを (x, y) 平面、または簡単に平面と呼び、 R^2 で表す。また、平面の2点 P, Q に対し、それらの間の距離を $d(P, Q)$ で表す。平面内の直線とベクトル、2つの直線、2つのベクトルが互いに平行であることを表すのに記号 $\parallel$ を用いる。たとえば、 (a, b) を成分にもつベクトルと直線 ℓ とが互いに平行であることを

$$(a, b) \parallel \ell$$

と表す。

Ⅲ サイクロイドの仲間達の表示

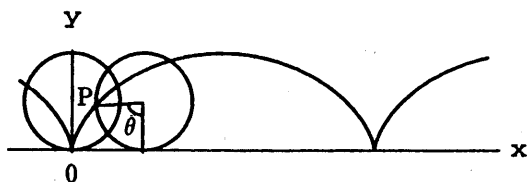


図1

まず初めにサイクロイドの表示式を求めよう。直線 l を (x, y) 平面内の x 軸にとり、半径 a の円 C_1 が $\{y \geq 0\}$ 内にあって x 軸上を転がるとする。 $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-a)^2 = a^2\}$ のときに原点 $(0, 0)$ にある点 P の軌跡を求めよう。 C_1 の回転角を θ とする (図1) と、 P の座標 (x, y) について次の式が成立する。

$$(3-1) \quad x = a(\theta - \sin \theta), \quad y = a(1 - \cos \theta).$$

次に内サイクロイドの表示式を求めよう。半径 b の円 C_0 の円周上を内側から半径 a ($0 < a < b$) の円 C_1 が接しながら滑らずに転がるとき、 C_1 上の固定点 P が動く軌跡を求めればよい。

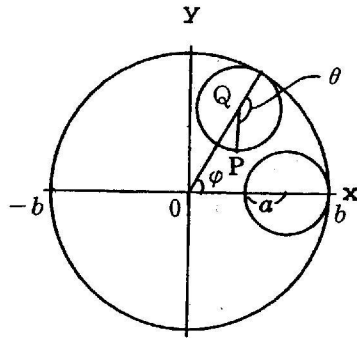


図 2

固定点 P の初めの位置を点 $(b, 0)$ にとろう。図2のように、円 C_1 の回転角を θ とおき、このときの円 C_1 の中心を Q とおく。半直線 OQ が x 軸と成す角度を φ とすると、

$$b\varphi = a\theta$$

である。したがって点 Q の座標は

$$\left((b-a) \cos \varphi, (b-a) \sin \varphi \right) = \left((b-a) \cos \frac{a}{b} \theta, (b-a) \sin \frac{a}{b} \theta \right)$$

であるから、点 P の座標を (x, y) とすると、

$$x = (b-a) \cos \frac{a}{b} \theta - a \cos (\theta - \varphi)$$

$$y = (b-a) \sin \frac{a}{b} \theta - a \sin (\theta - \varphi)$$

である。したがって内サイクロイドの方程式は

$$(3-2) \quad x = (b-a) \cos \frac{a}{b} \theta + a \cos \frac{b-a}{b} \theta$$

$$y = (b-a) \sin \frac{a}{b} \theta - a \sin \frac{b-a}{b} \theta$$

で与えられる。あるいは φ をパラメーターとして、

$$(3-3) \quad x = (b-a) \cos \varphi + a \cos \frac{b-a}{a} \varphi$$

$$y = (b-a) \sin \varphi - a \sin \frac{b-a}{a} \varphi$$

を内サイクロイドの方程式としてもよい。通常はこちらの形の方が用いられるようである。

次に、外サイクロイドの方程式を求めよう。半径 b の円 C_0 の円周上を外側から半径 a の円 C_1 が接しながら滑らずに転がるとき、 C_1 上の固定点 P が動く軌跡を求めればよい。

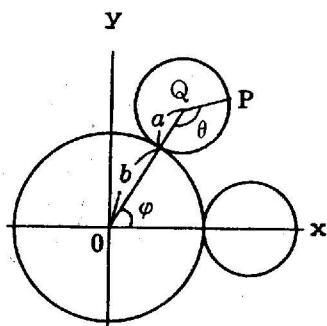


図3

固定点 P の初めの位置を点 $(b,0)$ にとろう。図3のように、円 C_1 の回転角を θ とおき、このときの円 C_1 の中心を Q とおく。半直線 OQ が x 軸と成す角度を φ とすると、

$$b\varphi = a\theta$$

である。よって、点 Q の座標は

$$((a+b) \cos \varphi, (a+b) \sin \varphi)$$

であるから、点 P の座標を (x,y) とすると、

$$x = (a+b) \cos \varphi + a \cos (\pi + \varphi + \theta)$$

$$y = (a+b) \sin \varphi + a \sin (\pi + \varphi + \theta)$$

である。したがって、外サイクロイドの方程式は

$$(3-4) \quad x = (a+b) \cos \frac{a}{b} \theta - a \cos \frac{a+b}{b} \theta$$

$$y = (a+b) \sin \frac{a}{b} \theta - a \sin \frac{a+b}{b} \theta$$

で与えられる。 φ をパラメーターとして得られる方程式

$$(3-5) \quad x = (b+a) \cos \varphi - a \cos \frac{b+a}{a} \varphi$$

$$y = (b+a) \sin \varphi - a \sin \frac{b+a}{a} \varphi$$

の方が外サイクロイドの式として用いられることが多いことも内サイクロイドの場合と同様である。

さて、サイクロイドと内サイクロイドの作り方の違いは、円 C_1 を転がすときに直線に沿って転がすか円に沿って転がすかということだけである。円の半径を限りなく大きくすると直線に近づくという見方ができるが、このような見方を用いて内サイクロイドの極限としてサイクロイドを得ることができる。このことを説明しよう。さて今、 b を大きくしていくわけであるが、そのときに内サイクロイドが遠くに逃げていってしまわないようにするため、内サイクロイド (3-2) を x 軸の正の向きに $-b$ だけ平行移動しておこう。すると、内サイクロイドの方程式は

$$\begin{aligned} x &= (b-a) \cos \frac{a}{b} \theta + a \cos \frac{b-a}{b} \theta - b \\ y &= (b-a) \sin \frac{a}{b} \theta - a \sin \frac{b-a}{b} \theta \end{aligned}$$

となる。そこで $b \rightarrow \infty$ としたときの x, y の極限を同じ x, y と書くことにすると、簡単な式変形と

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - 1}{t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

を用いることにより、

$$(3-6) \quad x = -a + a \cos \theta, \quad y = a \theta - a \sin \theta$$

となることがわかる。曲線 (3-6) を原点のまわりに $-\pi/2$ だけ回転させるとサイクロイド (3-1) が得られる。

C_0 の半径 b を限りなく大きくしていったときに外サイクロイドがサイクロイドに近づいていくことも、内サイクロイドの場合とほぼ同様に示すことができる。実際、外サイクロイド (3-4) を x 軸の正の向きに $-b$ だけ平行移動し、 $b \rightarrow \infty$ とすれば、極限として曲線

$$x = a(1 - \cos \theta), \quad y = a(\theta - \sin \theta)$$

が得られる。これを原点のまわりに $-\pi/2$ だけ回転させ、さらに x 軸に関して対称移動させることにより、サイクロイド (3-1) が得られる。

IV デルトロイド

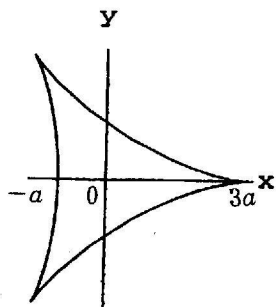


図 4

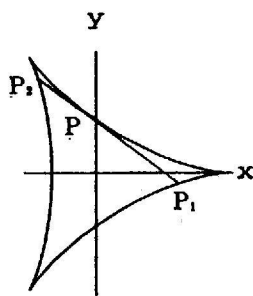


図 5

内サイクロイド (3-3) で特に $b = 3a$ とおくと

$$(4-1) \quad \begin{aligned} x &= 2a \cos \varphi + a \cos 2\varphi \\ y &= 2a \sin \varphi - a \sin 2\varphi \end{aligned}$$

となる。この曲線はデルトロイドと呼ばれる (図 4)。デルトロイド (4-1) 上で

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{dy}{d\varphi} = 0$$

となる点, 即ち

$$\left(2a \cos \frac{2k\pi}{3} + a \cos 2 \frac{2k\pi}{3}, 2a \sin \frac{2k\pi}{3} - a \sin 2 \frac{2k\pi}{3} \right) \quad (k \text{ は整数})$$

をデルトロイド (4-1) の尖点という。デルトロイド (4-1) を C で表そう。

デルトロイドの接線は次のような興味深い性質をもっている。

定理 1 デルトロイド C 上の尖点以外の点 P における接線と C との交点は P を除けばちょうど 2 点あり, これら 2 点の間の距離は $4a$ に等しい (図 5)。

したがって, 長さ $4a$ の棒をデルトロイドに接しながら, 1 回転させることができる。

定理 1 の証明 図形に相似交換をほどこすことにより, $a = 1$ の場合を証明すれば十分である。よって $a = 1$ とする。このときデルトロイド C の方程式は

$$(4-2) \quad \begin{cases} x = f(\varphi) = 2 \cos \varphi + \cos 2\varphi \\ y = g(\varphi) = 2 \sin \varphi - \sin 2\varphi \end{cases}$$

である。 φ_1 を任意の実数とし,

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$$

とおく。点 $P_i = (x_i, y_i)$, ($i = 1, 2$) を

$$\begin{cases} x_i = f(\varphi_i) \\ y_i = g(\varphi_i) \end{cases}$$

によって定義する。すると、

$$(4-3) \quad \begin{aligned} P_1 &= (2 \cos \varphi_1 + \cos 2\varphi_1, 2 \sin \varphi_1 - \sin 2\varphi_1), \\ P_2 &= (-2 \cos \varphi_1 + \cos 2\varphi_1, -2 \sin \varphi_1 - \sin 2\varphi_1) \end{aligned}$$

である。

このとき $d(P_1, P_2) = 4$ であることが次の計算よりわかる。(4-3) より、

$$\begin{aligned} (d(P_1, P_2))^2 &= \{(-2 \cos \varphi_1 + \cos 2\varphi_1) - (2 \cos \varphi_1 + \cos 2\varphi_1)\}^2 \\ &\quad + \{(-2 \sin \varphi_1 - \sin 2\varphi_1) - (2 \sin \varphi_1 - \sin 2\varphi_1)\}^2 \\ &= (-4 \cos \varphi_1)^2 + (-4 \sin \varphi_1)^2 \\ &= 16. \end{aligned}$$

次に直線 P_1P_2 とデルトロイド C の交点を求めよう。直線 P_1P_2 の方程式は

$$(4-4) \quad x \sin \varphi_1 - y \cos \varphi_1 - \sin 3\varphi_1 = 0$$

であることが容易にわかる。 P_1P_2 と C の交点を $(f(\varphi), g(\varphi))$ とする。(4-4) に

$$\begin{aligned} x &= f(\varphi) = 2 \cos \varphi + \cos 2\varphi, \\ y &= g(\varphi) = 2 \sin \varphi - \sin 2\varphi \end{aligned}$$

を代入すれば、

$$(4-5) \quad (2 \cos \varphi + \cos 2\varphi) \sin \varphi_1 - (2 \sin \varphi - \sin 2\varphi) \cos \varphi_1 - \sin 3\varphi_1 = 0$$

である。(4-5) の左辺を $F(\varphi)$ とおこう。すると、

$$\begin{aligned} F(\varphi) &= -2\{(\sin \varphi + \sin 2\varphi) \sin \varphi_1 + (\cos \varphi - \cos 2\varphi) \cos \varphi_1\} \\ &= 2\{\cos(2\varphi + \varphi_1) - \cos(\varphi - \varphi_1)\} \\ &= -4 \sin \frac{3\varphi}{2} \sin \frac{\varphi + 2\varphi_1}{2} \end{aligned}$$

となることがわかる。故に、

$$\begin{aligned} F(\varphi) = 0 &\Leftrightarrow \frac{3\varphi}{2} = k\pi \text{ または } \frac{\varphi + 2\varphi_1}{2} = k\pi \quad (k \text{ は整数}) \\ &\Leftrightarrow \varphi = \frac{2}{3}k\pi \text{ または } \varphi = -2\varphi_1 + 2k\pi \quad (k \text{ は整数}) \end{aligned}$$

である。デルトロイド (4-2) は周期 2π であるから、 $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ において $F(\varphi)$ の増減

表を書くとなりのようになる。ただし、 $0 < \varphi_1 < \pi/3$ と仮定した。この増減表から、直線 P_1P_2 と C の交点は P_1, P_2 と点 $(f(-2\varphi_1 + 2\pi), g(-2\varphi_1 + 2\pi))$ の3点のみであり、したがって、点 $(f(-2\varphi_1 + 2\pi), g(-2\varphi_1 + 2\pi))$ における C の接線は直線 P_1P_2 であることがわかる。

φ	0		φ_1		$\frac{2}{3}\pi$		$\pi + \varphi_1$		$\frac{4}{3}\pi$		$-2\varphi_1 + 2\pi$		2π
$F'(\varphi)$	0	-	-	-	0	+	+	+	0	-	0	+	0
$F(\varphi)$	正	$\searrow$	0	$\searrow$	負	$\nearrow$	0	$\nearrow$	正	$\searrow$	0	$\nearrow$	正

同様にして、 $\varphi_1 \neq k\pi/3$ のときには、直線 P_1P_2 と C の交点は、 P_1, P_2 と点 $(f(-2\varphi_1 + 2\pi), g(-2\varphi_1 + 2\pi))$ の3点のみであり、点 $(f(-2\varphi_1 + 2\pi), g(-2\varphi_1 + 2\pi))$ における C の接線は直線 P_1P_2 であることがわかる。

逆に、 P を C 上の尖点でない任意の点とすると、 P は

$$P = (f(\varphi), g(\varphi)), \quad \varphi \in (0, 2\pi/3) \cup (2\pi/3, 4\pi/3) \cup (4\pi/3, 2\pi)$$

と表される。そこで、

$$\varphi_1 = \pi - \frac{\varphi}{2}$$

とにおいて、 P_1, P_2 を $(4-3)$ によって定義すると、 $\varphi_1 \neq k\pi/3$, $\varphi = -2\varphi_1 + 2\pi$ であり、したがって上の議論により、 P における C の接線は3点 P, P_1, P_2 のみで C と交わり、 $d(P_1, P_2) = 4$ である。これで定理1は証明された。□

V アステロイド

内サイクロイド $(3-3)$ で特に $b = 4a$ とおくと、

$$\begin{aligned} (5-1) \quad x &= 3a \cos \varphi + a \cos 3\varphi \\ y &= 3a \sin \varphi - a \sin 3\varphi \end{aligned}$$

となる。この曲線はアステロイドと呼ばれる (図6)。アステロイド $(5-1)$ 上で

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{dy}{d\varphi} = 0$$

となる点、即ち

$$(3a \cos \frac{k\pi}{2} + a \cos 3 \frac{k\pi}{2}, 3a \sin \frac{k\pi}{2} - a \sin 3 \frac{k\pi}{2}) \quad (k \text{ は整数})$$

をアステロイド (5-1) の尖点という。

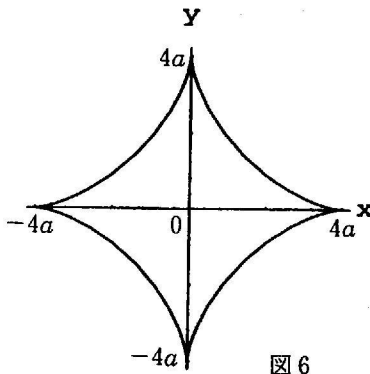


図 6

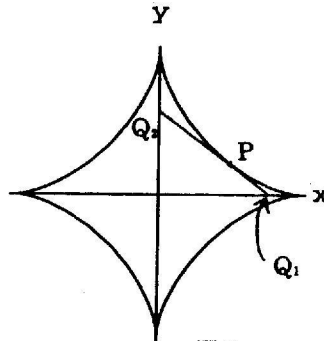


図 7

アステロイドの接線もまた次のような興味深い性質をもっている。

定理 2 アステロイド (5-1) 上の尖点以外の点 P における接線が x 軸, y 軸と交わる点をそれぞれ Q_1, Q_2 とすると, 線分 $Q_1 Q_2$ の長さは点 P の位置によらずに一定で $4a$ である。(図 7)。

したがって, ある 1 つの線分を, その両端点を互いに直交する 2 直線のそれぞれの上にあるようにして滑らせていけば, これらの線分はちょうど 1 つのアステロイドを囲む。(言い換えれば, x 軸と y 軸上に両端点をもつ長さ一定の線分族の包絡線としてアステロイドが得られる。) 定理 2 を証明しよう。

定理 2 の証明 $a=1/4$ の場合について証明すれば十分である。(5-1) に $a=1/4$ を代入して変形すると,

$$(5-2) \quad x = \cos^3 \varphi, \quad y = \sin^3 \varphi$$

となる。アステロイド (5-2) を C で表そう。

$$f(\varphi) = \cos^3 \varphi, \quad g(\varphi) = \sin^3 \varphi$$

とおく。アステロイド C 上の尖点以外の任意の点を P とする。

$$P = (f(\varphi), g(\varphi)), \quad \varphi \neq \frac{k\pi}{2} \quad (k \text{ は整数})$$

と表せる。点 P における C の接線を ℓ とすると,

$$\ell \parallel (f'(\varphi), g'(\varphi)) = (-3\cos^2 \varphi \sin \varphi, 3\sin^2 \varphi \cos \varphi) \parallel (-\cos \varphi, \sin \varphi)$$

であるから, ℓ の方程式は,

$$y = \frac{-\sin \varphi}{\cos \varphi} x + \sin \varphi$$

であることが計算される。よって、 ℓ の x 切片 Q_1 は $(\cos \varphi, 0)$ であり、 y 切片 Q_2 は $(0, \sin \varphi)$ である。 $d(Q_1, Q_2) = (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)^{1/2} = 1$ であるから、定理 2 が証明された。□

VI 外サイクロイド

外サイクロイド (3-5) で特に $b = 2a$ とおくと、

$$\begin{aligned} (6-1) \quad x &= 3a \cos \varphi - a \cos 3\varphi \\ y &= 3a \sin \varphi - a \sin 3\varphi \end{aligned}$$

となる。この曲線は腎臓形と呼ばれる (図 8)。腎臓形 (6-1) 上で

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{dy}{d\varphi} = 0$$

となる点、即ち

$$(3a \cos k\pi - a \cos 3k\pi, 3a \sin k\pi - a \sin 3k\pi) \quad (k \text{ は整数})$$

を腎臓形 (6-1) の尖点という。

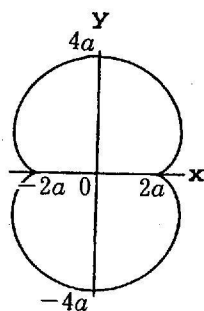


図 8

腎臓形は次に述べるような興味深い光学的性質をもつ。

定理 3 x 軸に平行な光線 $y = y_0$ ($y_0 \in (-4a, 0) \cup (0, 4a)$) が腎臓形 (6-1) の外接円

$$(6-2) \quad x^2 + y^2 = (4a)^2$$

に内側から入射して円に当たって反射するとき、反射光線は腎臓形 (6-1) に接する (図 9)。

したがって、反射光線の族の包絡線として腎臓形 (6-1) が得られる。この光学的性質によって腎臓形は円の焦線とも呼ばれる。この曲線は、水のような液体を入れたコップを暗い所に置き、それに一方向から光を当てることにより、実際に見ることができる。

さて、上に述べた腎臓形の性質を証明しよう。 $a = 1/4$ の場合について証明すれば十分である。また、腎臓形 (6-1) は x 軸に関しても y 軸に関しても対称であるから、第 1 象限 ($x > 0$ かつ $y > 0$) にある部分についてだけみれば十分である。

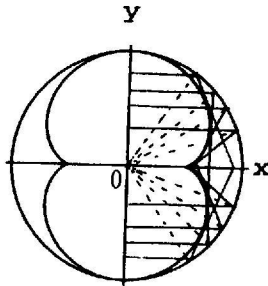


図 9

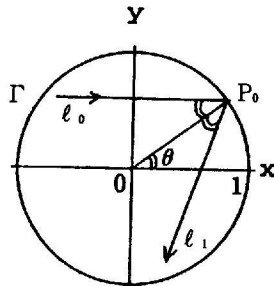


図10

腎臓形

$$(6-3) \quad \begin{aligned} x &= f(\varphi) = \frac{3}{4} \cos \varphi - \frac{1}{4} \cos 3\varphi \\ y &= g(\varphi) = \frac{3}{4} \sin \varphi - \frac{1}{4} \sin 3\varphi \end{aligned}$$

を C で表し、その外接円

$$(6-4) \quad x^2 + y^2 = 1$$

を Γ で表そう。 x 軸に平行な直線

$$(6-5) \quad \ell_0: y = \sin \theta, \quad (0 < \theta < \pi/2)$$

を考える (図10)。直線 ℓ_0 と円 Γ との (第1象限での) 交点 P_0 の座標は $(\cos \theta, \sin \theta)$ である。点 P_0 における円 Γ の法線 n の方程式は

$$y = (\tan \theta) x$$

である。

今、 P_0 を通り n に関して ℓ_0 と対称な直線を ℓ_1 とする。 ℓ_1 と x 軸の成す角度は 2θ だから、 ℓ_1 の傾きは $\tan(2\theta)$ である。故に ℓ_1 の方程式は

$$y = (\tan 2\theta)(x - \cos \theta) + \sin \theta$$

である。これを変形して

$$(6-6) \quad y = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} x - \frac{\sin \theta}{\cos 2\theta}$$

を得る。

次に、 ℓ_1 が接線となるような C 上の点を探す。 C 上の点 $P = (f(\varphi), g(\varphi))$ における C の接線を ℓ とする。 ℓ の傾きが

$$\frac{g'(\varphi)}{f'(\varphi)} = \frac{3 \sin^2 \varphi \cos \varphi}{\frac{3}{2} \sin \varphi (1 - 2 \sin^2 \varphi)} = \frac{\sin 2 \varphi}{\cos 2 \varphi}$$

であることを用いれば, ℓ の方程式が

$$(6-7) \quad y = \frac{\sin 2 \varphi}{\cos 2 \varphi} x - \frac{\sin \varphi}{\cos 2 \varphi}$$

であることが計算される。(6-6)と(6-7)を比較することにより, 直線 ℓ_1 が点 $(f(\theta), g(\theta))$ における C の接線であることがわかる。

以上により定理3が証明された。□

参考文献

- 1) 宮西正宜 (1996): 代数曲線のはなし, 現代数学序説第5章, 大阪大学出版会, 大阪
- 2) 小磯深幸 (1998): サイクロイドとその仲間たち, 京都教育大学教育実践研究年報14, 135-150
- 3) ヒルベルト, コーン・フォッセン著, 芹沢正三訳 (1975): 直観幾何学, みすず書房, 東京