

数と計算に関わる実験数学

— 素因数や約数の形を探ろう —

占部 博信

(京都教育大学)

Mathematical Experiment regarding to the Caluculation of Numbers

— Let's explore to find the forms of prime factors and devidents —

Hironobu URABE

2005年11月29日受理

抄録： 数と計算は、小学生のときからやっているという意味で簡単で素朴に見えるが、意外と奥が深く、算数や数学的な感性を養う上でも重要なものであると思う。本稿では、「素数」に注目して、自然数の素因数分解や約数の形と双子素数の組を探ってみることにしたい。

キーワード： 数と計算, 素数, 素因数分解, 約数, 双子素数

1. はじめに

本稿は、昨年度に行った「小学校算数教科教材論A：数と計算」の講義の内容の一部及びその後の考察が元になっている。最近、双子素数の組について、特に、興味を感じたのでいろいろと調べてみた。これらのことを中心に、叙述は「陳列的に」なるかもしれないが、まとめてみることにしたいと思う。

以下では、「素数が無限個存在すること」と、「素因数分解の一意性の成立」は、とりあえず、認めて利用する。

「素数(prime number)」とは、2以上の自然数で1とそれ自身以外に「約数」を有しない数のことである。

まず、「400以下の素数」を列挙してみよう。

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47,
53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109,
113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181,
191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257,
263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337,
347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397

とにかく、素数の分布は、大変に興味深いものがあり、神秘的ですらある。

まず、素因数分解を素朴な例について考えてみよう。

$111 = 3 * 37,$ $1111 = 11 * 101,$ $11111 = 41 * 271$
 $1001 = 7 * 11 * 13,$ $10001 = 73 * 137,$ $100001 = 11 * 9091$

なお、 $7 * 13 = 91$ である。さらに、

$10101 = 3 * 7 * 13 * 37 (= 111 * 91)$ $1010101 = 101 * 73 * 137 (= 101 * 10001)$
 $101010101 = 41 * 271 * 9091 (= 11111 * 9091)$

である。

さて、以下では、素数の全体を P と表すことにしよう。

例えば、73 や 137 及び 101 や 9091 は素数であり、このことを、

$$73 \in P, \quad 137 \in P, \quad 101 \in P, \quad 9091 \in P$$

のように記述することもある。

2. 実験工房 (その1)

まず、「数のピラミッド」として知られていることの一部を書くと、

$1234 * 9 + 5 = 11106 + 5 = 11111$, $123456 * 9 + 7 = 1111111$, $123456 * 8 + 6 = 987654$ であり、

$$11111 * 11111 = (11111)^2 = 123454321, \quad 111111 * 111111 = 1234567654321$$

である。また、

$$(10101)^2 = 102030201, \quad (101010101)^2 = 10203040504030201$$

$$(101)^2 = 10201, \quad (101)^3 = 1030301, \quad (10101)^3 = 1030607060301$$

である。さらに、

$$1001001 / 3 = 333667, \quad (333667)^2 = 111333666889$$

$$100040001 / 3 = 33346667, \quad 400010001 / 3 = 133336667, \quad 40011 / 3 = 13337$$

$$100070001 / 9 = 11118889, \quad 700010001 / 9 = 77778889, \quad 700000011 / 9 = 77777779$$

$$300050001 / 9 = 33338889, \quad 500030001 / 9 = 55558889, \quad 5000031 / 9 = 555559$$

$$1010501001 / 9 = 112277889, \quad 11100300111 / 9 = 1233366679$$

$$20000519 / 11 = 1818229, \quad 15000051 / (3 * 11) = 454547$$

という式などが成り立つ。

次は、素因数分解の式である。

$$10^5 + 1 = 11 * 9091, \quad 10^6 + 1 = 101 * 9901, \quad 10^7 + 1 = 11 * 909091$$

$$10^8 + 1 = 17 * 5882353, \quad 10^{18} + 1 = 101 * 9901 * 999999000001$$

$$10^{19} + 1 = 11 * 909090909090909091, \quad ((10^7 - 1) / 9) = 1111111 = 239 * 4649$$

$$((10^9 - 1) / 9) = 111111111 = 3^2 * 37 * 333667 (= 9 * 12345679 = 111 * 1001001)$$

なお、 p が素数とすると、 $2^p - 1$ がやはり素数であれば、この数をメルセンヌ数といい、自然数 m に対して、 $n = 2^m$ とするとき、 $2^n + 1$ の形の数をフェルマー数という。

これらの数については、興味深いことが知られている。

ちなみに、 $2^8 + 1 = 257$ 、や $2^{16} + 1 = 65537$ などは、素数であるが、

$$2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 * 6700417$$

は、($2^{64} + 1$ などと共に) 素数ではない。

上でも注意したように、 $n = 2^m$ 、 $m = 3$ としたとき、 $10^n + 1 = 10^8 + 1$ ($m = 4$ のときの $10^{16} + 1$ など) も素数ではなく、どんな数が素数となるのかは、一見しただけではなかなかわかるものではなさそうである。

3. 実験工房 (その2)

ここでは、次の形の数 10101, 1010101, 101010101, ..., すなわち、1 と 0 が交互に並んでいるような数について、その約数や素因数分解がどうなるかを考察してみよう。まず、

$$10101 = 3 * 7 * 13 * 37 = 111 * 91, \quad 1010101 = 101 * 73 * 137 = 101 * 10001,$$

$$101010101 = 41 * 271 * 9091 = 11111 * 9091$$

であり、 $101 * 9901 = 1000001$ に注意して、

$10101010101 = 3 * 7 * 13 * 37 * 101 * 9901 = 101 * 10101 * 9901 = 10101 * 1000001$
 が成り立ち、また、

$$1010101010101 = 239 * 4649 * 909091 = 1111111 * 909091$$

$$101010101010101 = 17 * 73 * 101 * 137 * 5882353 = 1010101 * 100000001$$

である。ここで、 $101 * 73 * 137 = 101 * 10001 = 1010101$ を利用した。さらに、

$$10101010101010101 = 3^2 * 7 * 13 * 19 * 37 * 52579 * 333667 = 111111111 * 90909091$$

$$(91 * 999001 = 90909091, 111111111 = 111 * 1001001 = 3^2 * 37 * 333667)$$

であることがわかる。ここで、 $19 * 52579 = 999001$ も用いた。

以上のパターンを注意深く見れば、一般的な規則がみてとれるはずである。

(実際、1と0を合わせた数が、 $4m+1$ であるか、あるいは、 $4m+3$ であるかに分けて考えればよい。)

つまるところ、このような形の数は決して素数にはならないのである。

課題1 上の主張を確かめてみよ。

課題2 1001001 や 1001001001 や 1001001001001 などについて、同様のことを考察せよ。

4. 展示室

ここでは、双子素数の組を陳列しようと思う。

さて、二つの数 A, B が双子素数の組であること (但し、 $B = A + 2$; あるいは、 $B = A - 2$) を

$$A, B \in P$$

と表わすことにする。

このとき、いろいろと調べてみると、次のようなことが示せる：

$$881, 883, \in P, \quad 88001, 88003 \in P$$

$$880000001, 880000003 \in P, \quad 97001, 97003 \in P$$

$$9700000001, 9700000003 \in P, \quad 97 * 10^{21} + 1, 97 * 10^{21} + 3 \in P$$

$$1055501, 1055503 \in P, \quad 1030031, 1030033 \in P$$

$$1131329, 1131331 \in P, \quad 1330030000001, 1330030000003 \in P$$

$$444401, 444403 \in P, \quad 11111111101, 11111111103 \in P$$

$$13007, 13009 \in P, \quad 130000007, 130000009 \in P$$

$$1009991, 1009993 \in P, \quad 223900000001, 223900000003 \in P$$

$$(2^{16} + 1 =) 65537, 65539 \in P, \quad ((10^8 + 1) / 17 =) 5882353, 5882351 \in P$$

$$78781, 78779 \in P, \quad 1500604060051, 1500604060049 \in P$$

$$10111001000000070000000100001, 10111001000000070000000100003 \in P$$

$$A = 109010000000000000100000000000027221, A + 2 \in P$$

$$B = 1090100000000000001000000000000123299, B + 2 \in P$$

$$C = 1929 * 10^{46} + 527, C + 2 \in P, \quad D = 2005 * 10^8 + 511, D + 2 \in P$$

$$E = 194500001, E + 2 \in P, \quad F = 1945 * 10^{22} + 157, F + 2 \in P$$

$$(1929000001000009291, 19450000000001, 1999 * 10^{33} + 1 \in P$$

$$1945000005491 = 31 * 4339 * 14459999, \quad 1945000005491 = 11 * 1768181818681)$$

$$270071, 270073 \in P, \quad 1929001009291, 1929001009289 \in P$$

$$G = 1999 * 10^{25} + 937, G + 2 \in P, \quad H = 10^{151} + 23731, H + 2 \in P$$

$$9001, 8999 \in P, \quad 99900001, 99899999 \in P$$

$$J = 2 * 3 * 5 * 7 * 11 - 1 = 2309, J + 2 \in P$$

$$K = 3 * 5 * 7 * 11 * 13 * 17 - 2 = 255253, K - 2 \in P$$

ということがわかる。

自分で、双子素数をゆっくり探してみるのも楽しいと思われる。

〔注〕 数式処理ソフト Maple での自然数 A の素因数分解は、 $ifactor(A)$; と改行キー (ENTER キー) で求め、 A より大きい最初の素数は、 $nextprime(A)$; と改行キーで求まる。(数 A の桁数が大きいときは、後者の利用がいいこともある。)

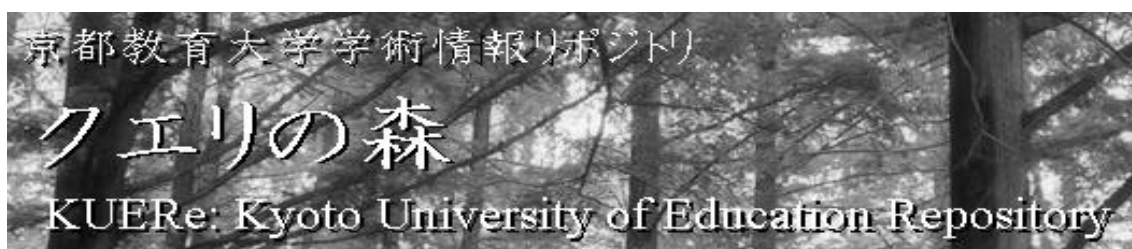
なお、数式処理ソフト Mathematica での自然数 A の素因数分解は、 $FactorInteger[A]$ と SHIFT キー + ENTER キーとすれば求まる。

あとがき

小川洋子氏の小説「博士の愛した数式」(2000)、講談社 には (江夏の背番号である) 28 が完全数であることが出てくるが、実は、このことが小説の完成にとってとても重要であつたらしく、数字のもつ不思議さが感じられて、大変興味深かった。とにかく「数」は神秘的である。これからも、いろいろな数について考察や実験(?) を続けて行きたいと思う。

参考文献

- 1) 木村良夫 (2003), パソコンを遊ぶ簡単プログラミング (「十進 BASIC」入門), ブルーバックス B1398, 講談社
- 2) コンウエイ, ガイ (根上訳) (2001), 数の本
シュプリングァー フェアーラーク 東京
- 3) 示野信一 (1999), Maple V で見る数学ワールド
シュプリングァー フェアーラーク 東京
- 4) ベレリマン (金光訳) (1980), おもしろ計算術 東京図書
- 5) リーベンボイム (吾郷訳) (2001), 素数の世界 その探検と発見, 第2版,
共立出版



この文献は、国立情報学研究所において電子化されたものを、本学でテキスト加工したものです。

