

中等教育段階における関数カリキュラムの研究

～多変数関数を中心として～

京都教育大学大学院 教育学研究科

教科教育専攻 数学教育専修

055051 開 猛雄

目次

序論

研究動機

研究の目的と方法

本論文の構成

本論

第1章 現在までの関数教育について

1節 関数教育の歴史的変遷

2節 関数教育の先行研究と生徒の学力からみる問題点

3節 まとめ - 現在までの関数教育における問題点 -

第2章 現在の学校教育における関数教育について

1節 現行カリキュラムの内容

2節 現在の生徒の学力とその問題点

3節 まとめ - 現行カリキュラムの問題点とそれを打開する視点 -

第3章 新しく提案するカリキュラムとその検証について

1節 提案するカリキュラム

2節 予備教育実験

3節 本教育実験

4節 まとめ - カリキュラムの検証 -

結論

研究成果

今後の課題

謝辞

引用・参考文献

資料

序 論

研究動機

研究目的

研究方法

本論文の構成

最初に、研究の動機、目的、方法および本論文の構成について述べる。

研究動機

2003 年 9 月に教育実習で中学 3 年生に対して関数の授業を行った。その時、生徒が問題を解くための力をつけることだけを考え、関数の本質を教えることについては全く考えず（考える余裕もなく）授業を行ったことを覚えている。また、関数に対しての生徒の意識を考慮することもなく、自分の中学生時代の経験則のみによった、独り善がりの授業を行ったことも記憶している。授業後、生徒に身につけさせるべき内容について改めて考えたとき、関数について深く知る必要があると思い研究を行うこととした。

そこでまず、関数に対しての生徒の意識についての実態を調べた。すると、一般的に生徒は関数を嫌い・苦手としていることがわかった。また、2005 年 10 月に筆者が担当していた数学の授業で、高校 1 年生 (21 名)、2 年生 (26 名) に対していくつか調査を行った結果、同様の実態にあることがわかった。対象の生徒は、1 年生は一般的に学力がそれほど高くないと判断され（数学 I（必修）のみを履修する）、2 年生はセンター試験や国公立試験を数学で受験しようとする文系の生徒（数学 B までを履修する）である。調査の内容及び結果は次のとおりである（表 1）。

Q. 関数の学習は好きですか。

表1 関数の学習が好き・嫌い

学年 \ 選択肢	好き (人)	嫌い (人)	普通 (人)
高 1	4	17	0
高 2	3	22	1

表 1 から、関数という単元の学習が嫌い生徒が、学年を問わず多数存在することがわかる。この調査で「嫌い」と答えた生徒に対して、「関数の学習のどの段階で嫌い（または苦手）になりましたか。」という調査を行った。その結果は次のとおりである（表 2）。

Q. 関数の学習のどの段階で嫌い（または苦手）になりましたか。

- a. 比例 b. 1 次関数 c. 2 次関数（中学校） d. 2 次関数(高校)
e. 三角関数 f. 指数関数 g. 対数関数

※高 1 で 1 名無回答

表2 関数の学習を嫌い（または苦手）になった時期

学年 \ 選択肢	初めから (人)	a (人)	b (人)	c (人)	d (人)	e (人)
高 1	1	4	6	5	0	0
高 2	0	1	4	5	9	3

これを、表 1 の調査で「嫌い」と答えた人数に対する割合を示すと次のようになる。

表示するときに、中学校で学習する内容（初めから～2次関数(中学)）と高等学校で学習する内容（2次関数(高校)，三角関数）に分け、躓いている段階をみる。

表3 関数の学習を嫌いになった時期の割合			
学年	選択肢	中学校の内容 (%)	高校の内容 (%)
高 1		94.1	0
高 2		45.5	54.5

このように、生徒たちは、中学校においてすでに関数の学習に躓いていることが推察される。

これらの、中学校での教育実習の体験や高校生への調査の結果から、特に中学校での関数カリキュラムについて研究を進めることにした。

研究目的

本研究では、現在の関数教育において生徒が躓いている現状の打開を試みるため、本来関数教育に必要な内容を見出し、それらを系統的に学習させるカリキュラムを開発する。そして、提案したカリキュラムを教育実験によって検証を行う。

以上のことから、本研究では、次の3つのことを目的とする。

- ① 関数の学習において、生徒が身につけるべき内容を明らかにする。
- ② ①をふまえて、関数教育のカリキュラムを提案する。
- ③ 提案したカリキュラムを検証する。

研究方法

研究方法として、目的①のために、日本の関数教育の歴史を考察し、現在までの関数教育における問題点を見出すこととする。加えて、先行研究を考察することから、関数教育において大切な内容を見出すとともに、問題点を打開する視点を明らかにする。

次に、目的②のために、歴史や先行研究から見出した問題点及びそれらを打開する視点をもととし、カリキュラムを提案する。

最後に、目的③のために、認識調査や教育実験を行い、提案したカリキュラムの妥当性を検証する。

本論文の構成

本論文の概要を、章を追って簡潔に述べる。

序論

研究の動機、目的、方法、本論文の概要について述べる。

本論

第1章: 現在までの関数教育について

1節: 関数教育の歴史的変遷

1900 年(明治時代後半)から 2000 年あたりまでの日本の関数教育の移り変わりについて調べる。その内容から、現在までの関数教育の特徴を考察することとする。

2節: 関数教育の先行研究と生徒の学力からみる問題点

関数の教育内容についての先行研究や教育実践などから、本来関数教育において生徒に身につけさせるべき内容を明らかにする。また、過去の生徒の学力調査結果および先行研究の考察から、過去の関数教育の問題点を明らかにする。

3節: まとめ-関数教育における問題点-

第1章のまとめとして、現在までの関数教育の扱われ方の特徴およびその問題点を述べる。

第2章: 現在の学校教育における関数教育について

1節: 現行カリキュラムの内容

現在の教育内容およびカリキュラムを調べ、その特徴を考察する。

2節: 現在の生徒の学力とその問題点

第1章で明らかとなった本来関数教育において大切な内容について、現行の関数教育を受けた生徒の定着度を認識調査によって確かめる。その結果から、現行カリキュラムの問題点を見出す。

3節: まとめ-現行カリキュラムの問題点とそれを打開する視点-

第2章のまとめとして、現行カリキュラムの内容とその問題点を述べる。

第3章: 新しく提案するカリキュラムとその検証について

1節: 提案するカリキュラム

第1章での本来関数教育において大切である内容、および第2章での現行のカリキュラムの問題点の2点をふまえ、多変数関数を中心とした新たな関数カリキュラムを提案する。

2節: 予備教育実験

1節で提案したカリキュラムの妥当性を検証するために行う教育実験の内容(多変数

関数など)について、その妥当性を検証するために予備教育実験を行う。

3節:本教育実験

1 節で提案したカリキュラムの妥当性を検証するために行った、中学3年生に対する教育実験について述べる。

4節:まとめ-カリキュラムの検証-

第3章のまとめとして、教育実験の結果から提案したカリキュラムの検証を行う。

結論

研究成果、今後の課題について述べる。

巻末

引用・参考文献，認識調査の問題，教育実験で使ったテキスト，謝辞

本 論

第1章 現在までの関数教育について

第2章 現在の学校教育における関数教育について

第3章 新しく提案するカリキュラムとその検証について

第1章 現在までの関数教育について

この章では、1節で、これまでの日本の関数教育の歴史的変遷を調べ、日本で扱われてきた関数教育の内容およびその特徴をまとめる。2節で、関数の教育内容についての先行研究、教育実践の内容および結果を考察することから、本来関数教育において大切な内容を明らかにする。さらに、過去の関数教育の下で学習を行った生徒の学力を調べ分析することから、教育の問題点を見出すこととする。3節で、第1章のまとめとして、1節と2節で明らかになった内容から、本来関数教育に必要な教育内容、さらに現在までの関数教育における問題点について述べる。

1節 関数教育の歴史的変遷

日本の学校数学における、教授要目や学習指導要領（関数教育が始まった時期から前学習指導要領まで）を調べ、関数についての教育内容の変遷の特徴について明らかにする。

1-1. 1900年前後の関数教育

関数を学校教育で扱い始めたのは明治時代に入ってからである。松宮(2000)は、当時の教科書や一般図書の中には、現在の教科書で見られるような関数教材($y=ax+b$ など)が載っているものがあるとし、次の著書を紹介している。

教科書：福田治軒(1872),『代微積拾級訳解』

一般の書物：Todhunter 著・長沢亀之助 訳(1881),『微分学』

山本信実(1882),『代数幾何学』

このように1900年以前には関数教材を扱った書物が発刊され始めた。

その後1902年に中学校教授要目が制定され、日本の数学教育が厳密に統制された。この時期、欧米ではJ.ペリーやF.クラインなどが、関数を学校数学へ取り入れようという考えをもっていた。その中の一人、ドイツの数学者クラインは学校に関数を導入し、「算術・代数的な内容と幾何的な内容を幾何的な形式による関数観念を中心として統合的に扱い、これを学校数学教育の中心とする」という考え方を打ち立てた。日本の数学教育界でも、このクラインの考え方の影響を大きく受けた者がおり、特に、森外三郎は、当時クラインの直系であるベーレンドゼン、ゲッティング共著の書物を日本語に翻訳した『新主義数学 上巻・下巻』(1914, 1915)を表している。小倉・鍋島(1957)は、この本の特徴として「函数的思想をあたえることに努める」、「座標の観念を与えてグラフを指導し、それ以降いたるところにグラフを用いて代数を進め、二次方程式の図的解法を $y=x^2$ のグラフの移動によって行っている。」という点を挙げている。このことより、関数を方程式の図的解法的手段として扱おうとしていたことが伺える。

しかし、このとき関数教材は排除されることとなった。排除された理由には、日本の藤澤利喜太郎と菊池太麓の考えが強く影響している。藤澤は「代数の分野には計算の助

けとして、図などを用いることはしない」、菊池は「幾何の分野には幾何の証明のみを扱い計算はいれない」という、代数と幾何を完全に分けて学習させる分科主義という考えをもっており、このように考え方がクラインの考え方と相反するものであったため、1902年の教授要目から関数教材が排除されることとなった。その他、現場の教師が関数を導入した融合主義の考え方で教科書を教える技量が無かったこと、高校入試問題では分科主義で学習してきたものに有利な問題が残っていたことなども、関数教材を排除した理由である。

1-2. 大正時代の関数教育

大正時代になり、徐々に関数を学校数学へ導入しようという考え方が広まってきた。その革新の主要人物には、林鶴一や国枝元治などがいる。

1917年頃の日本では、大正自由教育のもと、新主義数学以外にも外国の翻訳本や自分の考えを表した本がさまざまな数学者によって出版された。それらの本をいくつか上げると、関数の必要性について示した本は、

小倉金之助(1924)、『数学教育の根本問題』

佐藤良一郎(1928)、『初等数学教育の根本的考察』

などがあり、グラフに関する本は、

新宮恒次郎(1923)、『グラフ教授』

柿崎兵部(1924)、『算術教育に於けるグラフの取扱』

などがある。

このような、さまざまな新しい主張がある中で、文部省は1924年に数学科の教授要目を変更しようとした。その草案では、関数に関して、第一学年で一元一次方程式、連立方程式を扱っている。このことに関して小倉・鍋島(1957)は、「全体としてグラフ教材が強化され第一学年、第二学年に登場している」と、その特徴を挙げている。また、注意として、

- ・関数観念の慣用は数学教授全体にわたり初学年より之を努むべく、グラフは関数観念を直感的ならしむる補助として取り扱はるべきものとすることに注意すべし
- ・関数の変化及びグラフに関して総括及び補充するに際し微分積分の観念を与えと書いている。

これらより、それ以前の方程式を解くための視覚的補助としてのグラフの扱いが、グラフ自体を学習するという扱いに変わっていることが伺える。しかし、この草案は諸事情により実施されなかった。

同じ時期、中等教育研究会(1908年発足)が、1916年から教科に関する協議会を開くようになり、1918年には「全国師範学校中学校高等女学校数学科教員協議会」を開催した。参加者の中には、会長である嘉納治五郎の他、林鶴一、国枝元治、森岩太郎などがおり、文部省からの来賓である生駒万治も出席していた。

議題は、「師範学校中学校及び高等女学校の目的より見て其の数学教育上改善を要すべき点及び之が方案如何」というもので、その中で関数及びグラフ教授する時期と程度

について話し合われ、中等教育においては関数教材を豊富にすることが決定された。その時の議題の決定内容について示すと、師範学校・中学校では「関数思想を養成しグラフを教授すること」を目標とし、関数及びグラフに関する事項を教授する程度及び時期について次の4点を挙げている。

1. 関数観念はなるべくグラフを用いて確実にする。

2. グラフ教授の目的

グラフは数量の図解，各教科の融合を図るために教授する。

3. 関数及びグラフ教授の程度

師範学校・中学校・高等女学校に共通の内容

- ・実験や表によって得た2量の関係をグラフに表すこと
- ・座標
- ・一元一次，一元二次関数の変化及び方程式の解
- ・反比例のグラフ

師範学校・中学校のみの内容

- ・一次二次の連立方程式の解（簡単に取り扱う）
- ・三角関数のグラフ

4. 時期

①代数の初期から適宜に入れていく

②二次方程式のあとに，まとめて教授する の2案

これらの1，2，3から，関数の学習において，グラフの学習は重要とされていたことが推測できる。

しかし，このようなグラフを中心とした新しい教育内容が，教授要目に反映されたのは1931年の教授要目改正のときになってからであり，実行するには時間を要した。

1-3. 昭和時代初期の関数教育

これまで関数教育については，数学者の書物や協議会の議決の中で，関数を扱うことの必要性や実際の教育内容の展開例などを表しているのみであった。1931年になり，関数教材の必要性が叫ばれてきてから初めて，その内容を取り入れた教授要目が公示されることとなった。しかし，教授内容には，一次方程式(1年)，二次方程式(2年)，分数方程式(3年)，級数，対数(4年)と「関数」の文字はなく，「中学校では教授の際常に関数観念の養成に留意すべし」という言葉が入っただけである。

このような扱われ方から，生徒はほとんど関数を学習していなかったことが予想される。

1942年の教授要目改正時に，初めて関数が教材として取り入れられた。また，教授要目には，注意として「全般に亘り関係観念の涵養に留意すべし。」という言葉が入った。当時の教育内容およびその特徴を以下に挙げる。

表4:1942年の関数の教育内容

学年	中学校1年	中学校2年	中学校3年	中学校4年	中学校5年
教育内容	文字の使用と公式 公式 方程式 実験式 一次方程式 等速運動 直交座標 一次式と直線 二直線の交点	二次方程式 二次式の変化 二次方程式の解法	対数 指数の性質 対数の性質 対数表 円運動と三角関数 円運動 角速度 三角関数の変化	連続的変化の考察処理 近似値 極限 接線	関数の変化 関数の変化 極限 極小

1年の文字の使用と公式の単元は、文字を使用して量的関係を式に表示することによって文字に慣れること、公式を関数関係として考察させ実験によって公式を導くこととなっており、生徒に関数的な見方をさせようという内容である。一次方程式では、座標を導入して式と図表との観点を密接にし、一次方程式の解法に習熟させるとなっており、方程式の解法のためにグラフを導入している。

2年の二次方程式では、二次式の変化を考察させ二次方程式の扱いに習熟させるとなっており、ここでも一次方程式と同様に、二次方程式を解く手段としてグラフを利用している。

3年の円運動と三角関数では、一般角の三角関数を扱っている。

4年では、連続的変化を中心として極限の考察処理を扱っている。

5年では、極限の観念により関数を考察しその応用を図ることを扱っている。

これらのことから、関数はこれ以前と同様に、方程式の補助的役割であることは変わらないといえる。しかし同時に、少しずつではあるが変化の考察を扱うようになってきたことがわかる。

1-4. 第二次世界大戦後の関数教育

第2次世界大戦後から前学習指導要領改訂までの関数教育の変遷について、学習指導要領及び教科書を参考にまとめる。

(1)1947年の学習指導要領(試案)

このときの学習指導要領で扱われていた教育は、生活単元学習といわれ、生活経験を重視し、その中で数学を学ぶという内容であった。扱う数学の内容には系統性がないという点が問題であった。当時の関数についての教育内容およびその特徴を次に示す。

表5:1947年の関数の教育内容

学年	中学校1年	中学校2年	中学校3年
教育内容	棒グラフ・折れ線グラフ	比例・反比例	比例・一次関数

1年では、棒グラフ・折れ線グラフを扱っている。技能的な内容としては、

- ・日常の具体的な事例に棒グラフや折れ線グラフを用いること
- ・グラフから値を読むこと
- ・グラフを利用して問題を解くこと

となっている。

2年では、比例・反比例を扱っている。技能的な内容としては、

- ・ 日常の具体的な事実に比例・反比例を用いること
- ・ 式に表すこと
- ・ グラフに表すこと
- ・ グラフから比例定数を見出すこと
- ・ 比例と比例でないものを区別すること

などがある。

3年では、比例・一次関数を扱っている。技能的な内容としては、中学2年生の比例と同様に、

- ・ 具体的な事柄について比例を用いて考えること
- ・ 式に表したり、式を用いて問題を解いたりすること

初めて学習する内容としては、

- ・ 比例定数と直線のグラフの勾配との関係を知ったり用いたりすること
- ・ グラフで方程式や連立方程式の意味を知ったり問題を解いたりすること

などがある。

以上のような内容をみると、方程式の補助的役割としてのグラフの扱いは少なくなり、グラフを利用して比例や一次関数などについて考えることが中心に扱われているため、まさに関数とはグラフの学習であるといえよう。

(2)1951年の学習指導要領(試案)(第1次改訂)

このときはまだ生活単元学習が行われていた時期であった。その内容およびその扱いを次に示す。

表6:1951年の関数の教育内容

学年	中学校1年	中学校2年	中学校3年
教育内容	旅行の計画 計画 準備	機械の利用 機械と仕事	座標とグラフ 位置の表し方 変化とその表し方
	よいからだ 成長と栄養 運動と休養		式と生活 式の利用 方程式

それぞれ現実の問題を取り上げそれを解決するという流れで学習を進め、その中で必要な数学を扱っている。

1年では、ダイアグラムなどを題材として折れ線グラフが扱われ、グラフを読む学習を行っている。

2年では、さおばかりのつりあう力を表でまとめたりグラフで表したり、問題演習では比例・反比例の関係にあるものを見出したり、文章で表された条件を式で表したりしている。

3年では、数直線や座標平面での座標の表し方、 $y=ax$ や $y=ax+b$ のグラフ、方程式とグラフ、連立方程式とグラフなどを学習している。

これらは、系統性がなく生活の経験の中で関数を学習している。さまざまな現象をグラフで表すことが中心となっており、ここでも関数は変わらずグラフの学習となっている。

(3)1958年の学習指導要領（第2次改訂）

2回目の学習指導要領改訂の理由は、生活単元学習での教育によって学力が低下したという批判がおこったためである。そのため、この時の学習内容は、系統学習とよばれる、数学の内容の系統を重視するものであった。数学的に前学習指導要領より高度な内容を扱っている。当時の関数教育の内容およびその扱いを次に挙げる。

表7：1958年の関数の教育内容

学年	中学校1年	中学校2年	中学校3年
教育内容	割合と比例 比例・反比例 変わる量とグラフ 平均の速さ 運動とグラフ ともなっている二つの量 比例関係のグラフ	比例の関係 比例と一次関数 いろいろな比例関係 変数の積や商に比例する量 座標とグラフ 座標 比例の関係 $y=ax$ のグラフ 一次関数の関係 $y=ax+b$ のグラフ 一次方程式と直線 反比例のグラフ	二次方程式と二次関数 二次方程式とその解き方、応用 $y=ax^2$ のグラフ 二次関数のグラフ

1年では、正の数のみでの比例や反比例の学習を行っており、負の数まで拡張した関数の扱いは2年からとなっている。式・表・グラフの作成を行っており、比例以外の関係にある現象のグラフ化も行っている。

2年では、合成関数、様々な比例関係（2乗に比例、3乗に比例、積に比例、商に比例などの言葉と簡単な例の表示）、グラフの平行移動、グラフと方程式の解、実験式などが扱われている。

3年では、2乗に比例する関数のグラフ、二次方程式の解とグラフ、一般的な二次関数のグラフを扱っている。

以上のように、生活単元学習の頃と比べると、数学的な内容が一年繰り上げられており、3年生では初めて二次関数が登場している。これらのことから、大変高度な内容へと変化した改訂であるといえよう。

(4)1968年の学習指導要領（第3次改訂）

この時期は、数学教育の現代化と呼ばれた時期である。当時、欧米で科学技術の発展を目指し数学教育の改善がはかられ、日本もその動きにあわせて行われた。

当時の関数の教育内容とその扱いを次に示す。

表8:1968年の関数の教育内容

学年	中学校1年	中学校2年	中学校3年
教育内容	関数 関数と対応 比例・反比例	1次関数 一次関数 一次関数のグラフ 一次関数の決定 一次方程式と一次関数	関数 関数とグラフ 関数の値の変化 逆関数

個々の内容をみると、過去の生活単元学習や系統学習のときには見られなかった内容が扱われており、全体的には系統学習の頃よりも高度な内容に変わったという印象を受ける。特に著しく変化した点を中心にいくつか挙げると次のことがいえる。

1年では、関数である例と関数でない例を示しながら一意対応が関数であることを学習し、その後式やグラフで表すことを学習する。比例や反比例では負の数も含めた範囲で表にまとめたりグラフを作成したりしている。

2年では、関数記号 f が登場する。さらに、一次関数の変化の割合、軸に平行な直線のグラフや式なども扱っている。

3年では、 $y=x^2$ 、 $y=ax^2$ 、 $y=ax^3$ のグラフとその性質及び変化の割合、 $y=ax+b$ 、 $y=ax^2$ の逆関数とそのグラフを扱っている。

全体としては、関数を集合と対応の考え方で定義し、あらゆる場面で集合とその要素の対応関係を図で表現している点が改訂前の内容から変化した点として挙げられる。さらに、関数記号 f や逆関数も扱っており、高度な内容であったと考える。これらの内容を扱った結果、算数・数学嫌いや落ちこぼれ(この時に初めて使われた言葉)が増加したため、このときの教育内容は批判され、改訂が望まれるようになった。

(5)1977年/1989年/1998年の学習指導要領（第4次改訂）

現代化のころの高度な内容を扱うことの反省から、新しく学習指導要領が提示され教育内容が大幅に変更された。当時の改訂ではゆとりと充実が、次の改訂（1989年）では新しい学力観が、その次の改訂（1998年）では生きる力、教育内容の3割削減がスローガンとされ、教育内容の変更が行われてきた。

この3回の改訂では、関数教育の内容に大きな変動はない。そのため、すべてを一つにまとめて示し、その扱いについて述べることにする。

表9:1977年/1989年/1998年の関数の教育内容

改訂年 \ 学年	中学校1年	中学校2年	中学校3年
1977	関数 関数関係 関数関係とグラフ	1次関数 1次関数 1次関数とグラフ 1次方程式と1次関数	関数 2乗に比例する関数 2乗に反比例する関数 関数と集合
1989	関数と比例 変化と関数 比例と反比例 座標とグラフ	1次関数 1次関数 1次関数と方程式	関数 いろいろな関数
1998	比例と反比例 1. 比例と反比例 比例 比例のグラフ 反比例 反比例のグラフ 比例, 反比例の利用	1次関数 1. 1次関数とグラフ 1次関数 1次関数のグラフ 1次関数の式を求めること 方程式とグラフ 1次関数の利用	関数 $y=ax^2$ 1. 関数とグラフ 関数 $y=ax^2$ 関数 $y=ax^2$ のグラフ 関数 $y=ax^2$ の値の変化

1年で、負の数を含めた比例・反比例を扱っている。

2年で、一次関数とそのグラフを扱っている。

3年で、関数 $y=ax^2$ とそのグラフを扱っている。

以上のことから、各学年で扱う関数が固定されてきているといえる。

2節 関数教育の先行研究と生徒の学力からみる問題点

1節より、日本の教育では方程式を解くことが中心であったため、関数では、その視覚的解法的手段として「グラフ」が導入され扱われてきたこと、その後、方程式の解法としての扱いからグラフ中心の扱いへと変容してきたことがわかった。このようにグラフ中心の教育内容であることから、関数を学習する生徒にとって、関数とはグラフであるとの認識が強いことが予想される。

本節では、本来、関数教育において大切な内容について、先行研究を考察することから見出す。さらに、過去の生徒（グラフ中心の関数教育を受けてきた）の関数についての調査結果を考察することから、その問題点を明らかにする。

2-1. 関数の教育で必要な内容

従来、関数教育は式やグラフを中心に行われてきたため、生徒は関数とは式やグラフのことであるという誤った認識をもっていると予想される。このように、関数の定義が理解できていなければ、当然関数を理解したとはいえないであろう。

また、関数教育において、本来大切なことは現実事象の変化の様子を考察する能力を育成することであり、グラフや式などは事象を考察させるための道具として扱うべきであると考えられる。このことに関して、岡森(1981)は「実在のものの変化の様子や対応のしかたなどを解明する方向での内容が要求される」と、現実事象の変化を考察することの重要性を指摘している。また岡森(1981)は、教育内容として実在からの変量の抽出を述べている。現実事象を考察する能力の育成のためには、生徒自らが身の回りから変化しているものを見つける能力が必要であり、大切な教育内容の一つといえよう。

ここで、考察対象である現実事象についていえば、いくつかの条件によって結果が示されるという多変数の対応関係にあるものが多様に存在する。そのため、現実事象の変化の様子を考察する能力の育成には、多変数関数を扱うことも必要であるといえる。

以上のことから、本来関数教育において大切な内容としては、関数の定義を扱うこと、変量の抽出を扱うこと、多変数関数を扱うこと、の3つが考えられる。

これらのことに関して、先行研究や実践例から、現在の関数の定義や多変数関数の教育内容の有用性などについて考察することとする。

2-1-1. 関数の定義について

香村(1960)、佐々木(2005)、保坂・山崎(1997)を参考に関数の歴史を振り返り、その中から関数の定義についてまとめることとする。

「関数」という言葉はライプニッツによって初めて使用され、彼は「関数は方程式によって示される事実」であるとした。これより、関数は式によって表されるものであるという定義から始まったことがわかる。

さらにライプニッツは、デカルトの幾何学を取り入れ、微積分の研究を行っていき、

微分や積分の記号を生み出し微分積分学の体系化を行った。

それに対して、当時のニュートンも現在の微分積分学にあたる考え方をしていた。ニュートンは時間に伴う変量を調べ、時間のことを特に流量と呼び、時間に伴う変量のことを特に流率と呼んでいたようである。そのため、ニュートンの考え出した現在で言う微分積分学の発想は、流率法と呼ばれている。

1687年、ライプニッツは友人に「一について言いうることと他について言いうることの間に、恒常的規則的關係の存在するとき、一が他を表現する」ということを言っており、関数の概念について言及している。また変数や定数についても「連続的に増大または減少する量を変数と呼び、それと反対に他の量が変わる間、同じ状態になっている量を定数という」と定義している。

この後、変数、定数の言葉を用いていくつかの関数の定義がなされた。ヨハン・ベルヌイは、「変数と定数から、どのように合成されていようとも、その量をその変数の関数という」と定義しており、オイラーは、「関数とは、変数と定数とで表された、一つの解析的な式のことである」と定義している。これより、関数の定義は、「式で表現されたもの」に加え、「その式は定数と変数によって成り立っている」というものとなっていた。

このころまで、関数は既知の解析的な式で表されるものと考えられていた。

それに対してコーシーは「いくつかの変数の間に何らかの関数があり、その中の一つの値が与えられれば、他の変数の値がすべて定まるときは、通常その一つの変数によって他の変数を表していると考え。そのとき、その一つの変数を“独立変数”、他の変数をその“関数”と名づける」とし、いくつかの変数に何らかの対応関係があれば関数である定義としている。

さらにディリクレは関数の定義に拡張をもたらした。その定義とは、「解析的式をもたなくても、関数は存在する」というもので、「関数は式表示されるもの」という概念から抜け出す考え方であった。

以上のことから、関数の定義は「式で表示されるもの」から「対応が関数である」と変容を遂げてきたことがわかる。

また、現在の学校数学の教科書では、「ともなって変わる2つの数量 x , y があって、 x の値を決めると、それに対応する y の値がただ一つに決まるとき、 y は x の関数である」となっており、ディリクレの関数の定義に基づいている。このような対応による定義を生徒に学習させる必要があるだろう。

2-1-2. 変量の抽出について

開・渡邊(2005)は実在からの変量の抽出について、大学生の模擬授業による実践例を行っている。内容は、日本とドイツの指導内容を比較しながら、関数の導入段階の教育内容として生徒に変量の抽出をさせる教育実験を行ったものである。

2回の交流授業を行い、1回目は日本とドイツの双方が、現在の学校教育で行われて

いる関数の導入についての授業を紹介しあった。2回目の交流授業では、日本側のみが改良した授業を紹介した。その際、1回目のドイツの授業内容や方法を参考にした。2回の授業内容について以下に示す。

1 回目の授業について

日本：画用紙で作成した模型を利用して水槽に水を溜めていく様子を見せ、時間を x 、水位を y と決めて、その関係を表にまとめ式に表した。

ドイツ：生徒が3種類から好きな実験用具を選んで実験を行い、実測値を方眼用紙に打ち、グラフを完成させた。3種類のグラフは1次関数であるものとそれ以外のものも含んでいた。3種類のグラフを比較して、1次関数の”変化率が一定”である性質を強調した。

2 回目の授業について

身の回りの現象から生徒が自ら変量を抽出することに重点を置き、活動も取り入れた授業を行っている。教材には観覧車を用いており、その理由として開・渡邊(2005)は「さまざまな変量(時間、高さ、角度、弧の長さなど)を発見でき、現象を考察する力を養うことができる」という点を挙げており、また、「着目する変量を教師側が決めて学習を始めるのではなく、生徒自身が変量を抽出することに留意した」としている。

さらに、授業の結果について、次の4点にまとめている。

- ①観覧車を使って変量を抽出させることで、さまざまな変量について考えようとする力を養うことができること。
- ②関数とは何かを学習させることができ、後のさまざまな関数の場合においても、生徒は変量を意識して学習を行うことができるのではないかということ。
- ③伴って変わる2つの変量の対応と変化の関係も押さえることができること。
- ④体験を通して学習させることにより、①～③の理解がしやすいのではないかということ。

これらの結果から、身の回りの事象から伴って変わる変量を抽出し、その関係を調べていくという関数の導入方法に一定の効果が認められた。

2-1-3. 多変数関数について

身の回りの事象を考察する能力の育成のために、本論文では多変数関数の必要性を指摘しており、その点に関しての山本(2005)が行った実践例がある。

山本(2005)では、「円柱の体積」を題材とし、コンピュータを用いながら、 $z=\pi x^2 y$ で表現される多変数関数を、高校1年生に対して行っている。山本は多変数関数の学習で重要な考え方として、「①複数の変量の組とそれに伴って変わる変量を抽出し、その対応が一意対応であるものを見出すこと、②1つの変数に着目し、残りの変数を固定し定数と見て、1変数関数の考察に帰着させ、そこから関数全体の値の変化を捉えること」の2点を挙げている。このように、多変数関数を扱う上でも1変数関数と同様に、伴って変わる変量を抽出すること、関数の定義である一意対応を見出すことが大切であると

している。また、生徒の実態について、変量を抽出すること、対応関係を見出すこと、区間変化率で関数の値の変化を考えることなどが十分に指導されておらず、多変数関数の導入に際してはこれらのことに注意をする必要があるとしている。

実践では、計算処理ソフト Excel を使用し、関数の値の変化を学習させたり、また教師側で $z=\pi x^2 y$ のグラフを作成し生徒に見せたりなどしている。

実践後は、授業内容理解の調査とアンケートを実施しており、その結果から、成果と課題をいくつか挙げている。それらを箇条書きすると次のようになる。

<成果>

- ①多変数関数で1変数を固定して考えることの意味は多くの生徒が理解できた。
- ②多くの生徒が2変数関数のグラフについて理解したと自己分析している。
- ③集中して授業に取り組んでいた。

<課題>

- ①関数の定義についてはまだまだ不十分である。
- ②平均変化率の意味の理解が半数以上の生徒が不十分である。
- ③内容への興味があまり持てない生徒が多くいた。

まとめとして、関数の定義（対応関係を把握して関数関係を理解すること）や平均変化率を用いて関数の値の変化を調べることができる生徒は、多変数関数特有の考え方である変数の固定も理解できる。しかし、定義や平均変化率の理解が不十分であると、表面だけの理解に陥ってしまう危険性が示唆された、としている。

これらのことから、関数を理解するためには、変化の割合や多変数関数などを理解することが大切であること、高校1年生で学習可能であることが明らかとなった。また、それらを理解するためにも関数の定義を理解することが必要であることも明らかとなった。

2-2. 生徒の学力

1節から、従来の関数教育は式やグラフ中心の内容であったことが明らかとなり、2-1から、現実事象の変化を考察する能力の育成が、本来関数教育において大切な内容であることが明らかとなった。

以上のことより、関数を学習した生徒が身につけておかななくてはいけない内容は、式やグラフに関することおよび現実事象の変化の考察に関することであるといえよう。これらのことに関する生徒の理解度の実態を、横地・菊池(1962)の行った調査結果を考察することにより明らかにし、従来の関数教育の問題点を見出すこととする。

横地・菊池(1962)の行った調査は、(1)式からグラフをかく問題、(2)グラフから式を求める問題、(3)グラフから変化量を求める問題、(4)式から変化量を求める問題、(5)現実事象の変化の様子に関する問題の5つである。以下に、それらの内容と結果および考察を述べる。

(1) グラフと式に関する調査

問題 次の式のグラフをかきなさい。

表10 式→グラフ

問題内容	正答率
① $y=3x-2$	23.7 %
② $y=-\frac{4}{3}x$	34.0
③ $y=0.6x+5$	15.0
④ $y=1.5x+1$	36.0
⑤ $y=3x$	60.1
⑥ $y=-\frac{1}{2}x+2$	44.3

結果と考察

①, ②, ③は 1958 年に福島県で, ④は 1959 年に東京都で, ⑤, ⑥は 1960 年に鳥取県で行われた調査である。

①, ③, ④, ⑤は一次関数 ($y=ax+b$ の形) の式である。①は定数部分も整数となっており, 最も基本的な式といえる。その結果が 23.7 %となっており, 4 人に一人しかグラフがかけないという状況である。③, ④, ⑥は定数部分が小数もしくは分数となっており, ①よりは少し発展的ともいえる。同県の調査である①と③を比べると, ③はさらに低い正答率となっており, 生徒は①よりも困難としていることが分かる。④, ⑥はそれぞれ別の場所で行われた調査結果である。①よりも高い正答率を示しているが, 十分に定着はしているとはいえない。

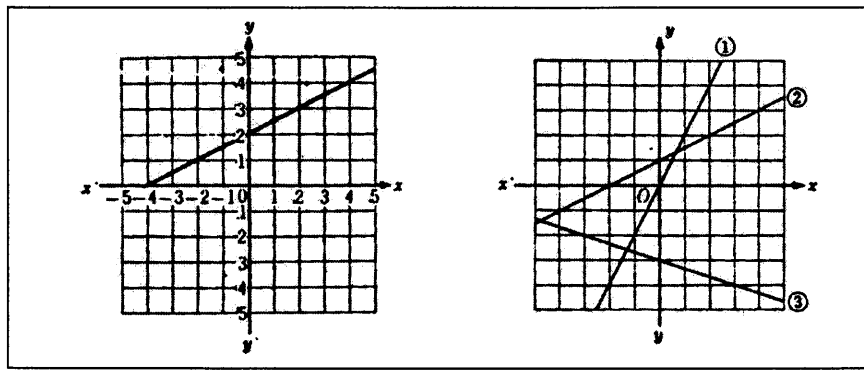
②, ⑤は比例 ($y=ax$) の式である。一次関数の式よりは正答率が高いがこれに関しても定着しているとはいえない。

(2) グラフから式を求める問題

問題 次のグラフの式を求めよ。

図1 グラフ→式(i)

図2 グラフ→式(ii)



結果と考察

正答率はそれぞれ 50.0 % (左), 59.6 % (右①), 55.4 % (右②), 50.5 % (右③)

これらは「グラフから式を求める」問題であり、先の調査「式からグラフをかく」問題と逆の内容である。式からグラフをかく問題よりは良い正答率を示している。しかし、関数の学習での最も基本的な内容についての正答率が5～6割ということでは、十分に定着しているとはいえない。

このように、基本的な関数の技能的な内容については、十分に定着していないといえる。

(3) グラフから変化量を求める問題

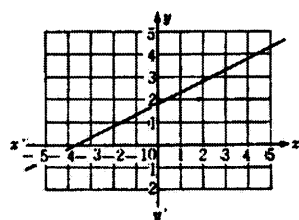
図3 グラフから変化量を判断する問題(i)

$y=1.5x+1$ について次の問に答えよ。

- (1) この式のグラフをかけ。(正答率 36%)
(これは<例2>に掲載したもの)
- (4) x の値が1.2から4.4まで変化した量は座標面上のどの部分の長さか、左の座標上に記入せよ。(正答率 15%)
- (6) y の変化した量も座標上に記入せよ。(正答率 11%)

図4 グラフから変化量を判断する問題(ii)

下図の直線グラフについて次の問に答えよ。



x 座標が2から5まで動いたとき、

- (4) x の変化した量はいくらか。
(正答率 55%)
- (6) y の変化した量はいくらか。
(正答率 46%)

結果と考察

このように、グラフと変数 x , y の変化が結びついておらず、基本的な増加量を求めることができていない。

視覚的な条件が与えられている場合でこのような正答率であれば、視覚的な条件がない場合では、正答率に変化があると考えられる。

(4) 式から変化量を求める問題

図5 式から変化量を判断する問題(i)

$y=ax+b$ の式で、 x の値が 5 から 8 まで変化するとそれに伴って y の値は 0.5 から 2 まで変化する。このときの

(1) x の変化した量は , y の変化した量は 。(正答率 54%)

図6 式から変化量を判断する問題(ii)

次の 内に適当な数を入れよ。

(1) $y=2x-3$ の式で、 x の傾きが 3 から 5 まで変化すると y の値は から まで変化する。(正答率 51%)

(2) $y=-1.5x+10$ の式で、 x の値が 2 から 6 まで変化すると y の値は から まで変化する。(正答率 40%)

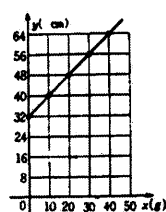
結果と考察

グラフによる視覚的な補助がないため、グラフがある場合よりも正答率が低くなるかと考えたが、それほどの違いはないようである。しかし、この場合でも正答率が 4～5 割であるということから、変化の様子ということが定着していないといえる。

この結果に関して、横地・菊池 (1962) は、「増分の概念が指導されていないことも関係しているが」、「事実教科書のどこを探しても増分を求める指導は行われていない」と述べている。指導していないのであれば正答率が低いことが当然であろうが、従来グラフ教授を関数教育の中心としてきたにもかかわらず、変化量を求めるという基本的な内容もできていないというのは問題であろう。

(5) 現実事象の変化の様子に関する問題

図7 現実の現象への応用問題



バネにおもりをつるして、おもりの重さ x (g) とそのときのバネ全体の長さ y (cm) との関係を実験によってしらべたら、左図のようなグラフになった。これについて次の問に答えよ。

- (1) この直線の傾きを求めよ。 (正答率 28%)
(2) このバネは、おもりを 1 g 変化させるごとに長さはどれだけずつ変化するか。 (正答率 51%)

結果と考察

この問題は特に注目すべきと考える。(1), (2) の答えの数値は同じである。両方の問題とも正答率が低いことは問題である。それ以上に (1), (2) が同様の答えであるにもかかわらず、正答率が 20 % 以上も異なっている点は問題であると考ええる。(1) の直線の傾きと (2) の現象事象における変化の割合が結びついていないといえる。

しかし、(1) のただ傾きを求めるという数学的な計算よりも、(2) の現実事象についての問題を解くほうが正答率が高いことから、生徒は実際の現象を題材にして考えるほうが数学的内容を理解することが予想される。関数の学習を行う際には、現実のものを題材とすることが良いといえよう。

以上の調査結果から、従来の関数教育の問題点として、次のことが挙げられる。

従来の関数教育は、グラフや式を中心とした教育内容であったが、それらの内容は生徒に十分身についているとはいえないこと。また、本来関数教育において大切な内容である、値の変化についての理解も不十分であること、さらには現実事象を考察する能力も十分でないこと。

3節 まとめ-現在までの関数教育における問題点-

本章では、関数教育の歴史を考察することから、日本の関数教育はグラフや式を中心に扱う内容であることが明らかとなった。しかし、従来の関数教育では、式やグラフを中心に学習が行われてきて、現実事象の変化の様子を考察する能力を十分に育成できないという問題点が明らかとなった。また、式やグラフを中心に教育を受けてきた生徒であっても、式やグラフの問題に対する正答率が低く、学習した内容でさえ十分に身につけていないという問題点も挙げられた。

本来関数教育においては、現実事象の変化の様子を考察させる能力を育成することが必要であると考え、このことに関して、先行研究を考察した結果、変量の抽出を行う、多変数関数を扱うことが重要であることが明らかとなった。

次章では、現行の教育内容やカリキュラムを考察することや、その教育の下で学習した生徒の認識を調査し、その結果を考察することから、本章で明らかとなった問題点が打開できる内容であるかを明らかとする。

第2章 現在の学校教育における 関数教育について

前章より，過去の関数教育の変遷や先行研究の考察より，問題点をいくつか挙げた。本章では，現行の教育内容やカリキュラムの考察や，その教育の下で学習した生徒の認識を調査し考察することから，前章で挙げた問題点が打開できる内容であるか確かめることとする。

1節 現行のカリキュラムの内容

現行のカリキュラム及び教育内容は次のとおりである。現在の関数教育は小学校より始まっている。本研究では主に中学校を焦点としているが，関数の導入段階の指導について考察するために，小学校段階における関数の関数に関する学習を見てみる。

表11: 現行のカリキュラム

学年		学習する関数	学習する数学的内容	
			変化	式, 対応表, 図など
小学校	4年		伴って変わる2つの数量	表
	5年			折れ線グラフ 言葉の式
	6年	比例	平均 増加量	
中学校	1年	比例と反比例	変数	座標 関数のグラフ
	2年	一次関数	変域 変化の割合	定義
	3年	$y=ax^2$		

小学校では，伴って変わる2つの変量を扱い，変化の様子を調べるために表やグラフや式を扱っている。第6学年に平均についての学習があり，変化の割合へと繋がっていく基本的な内容を扱っていると考えられる。

中学校では，表，グラフ，式を中心に関数を学習していく流れとなっている。変数や変域を学習し，式から増加量や変化の割合を求める内容となっている。実際の現象と増加量や変化の割合などを結びつけて考える内容は見られない。

2節 現在の生徒の学力とその問題点

現行の教育内容で学習した生徒に対して、関数についての認識調査を行った。

2-1. 調査について

2-1-1. 目的

生徒の関数に対する認識を調査し、現行の関数教育の問題点を見出すことを目的とする。

2-1-2. 方法

対象生徒：中学1年～3年生（向日市立 K 山中学校，私立 R 中学校，京都市立 K 中学校，田辺市立 M 中学校，横浜市立 I 中学校）

対象生徒の人数，対象中学校名については，問題ごとに記載する。

調査日時：2006 年 10 月

課題，手続き：質問紙による一斉テストの形式で行う。

2-1-3. 内容と結果および考察

それぞれの問題について，問題番号の横には数学的な観点を述べている。また，各問題中の印や空欄を埋めてある文章は模範解答である。

調査の結果は表にまとめてあり，表の下には正答率のみが表示してある。

それぞれの調査内容，結果および考察を述べることとする。

1 有限量と無限量

個数に限りがあるもの、限りがないものの番号をそれぞれ選んでください。

- ① 日本の都道府県の数
- ② 20cm の細い “ひも” でできる四角形の面積
- ③ つめの伸びる長さ
- ④ 偶数

限りがある ① 限りがない ②, ③, ④

結果

市立 K 中学校 1 年 (16 名)

	都道府県	面積	つめ	偶数
限りがある	15	15	2	1
限りがない	1	1	14	15

考察

①, ③, ④に関しては, 素朴に理解している。しかし, ②に関してはほとんどの生徒が素朴に考えているために, 誤答となっている。よって, 無限量の概念について, 中学生の理解は不十分であるといえる。

② 連続量と離散量

連続的に変化しているものに○をつけてください。

- () 10 円玉を 1 枚ずつ置いていくときの枚数
- (○) 水の温度が 6℃から 25℃まであがるときの温度のあがり方
- () 階段を 2 段ずつのぼるときの段数
- (○) ストップウォッチで 10 秒はかるときの秒数
- () ホームランの本数
- () 歩行者用の信号機の色

結果

市立 K 中学校 1 年 (16 名)

	10円を1枚	温度	階段2段	10秒	ホームラン	信号機の色
1	○		○			○
2	○		○			○
3		○			○	
4	○	○	○	○	○	○
5	○	○				
6	○	○		○		
7		○	○	○	○	
8		○		○		
9	○		○			○
10	○		○			○
11		○		○		○
12			○	○		○
13	○		○		○	
14	○		○			○
15	○		○	○		
16		○	○			○
計	10	8	11	7	5	9

考察

生徒によって、連続量と離散量についての理解はさまざまであり、共通の認識があるとはいえない。また、10 円玉、階段 2 段を選んだ生徒が多く、ホームランを選んだ生徒が少ないことから、生徒は同じ間隔で増加しているものを連続的変化と考えていることが予想される。

③ 集合の意識

“集合”という言葉から連想するもの(こと)を書いてください。

何かの規則に沿ってあつまっているもの、あつまっているものが1つであつても、1つもなくても良い

結果

市立 K 中学校 1 年

生徒の多くは、「たくさんもの」「人が集まっている」などの回答をしていた。

考察

生徒は日常で使う集合の意識が強く、多くのものや人が集まっている様子を考えていることがわかる。要素の数が 1 または 0 などは、集合とは考えないことが予想される。

4 関係

次の表の上段と下段はどのような関係にあるでしょうか。

(1) スポーツ

野球	バスケット	バレー	柔道	サッカー
9	5	6	1	11

スポーツの名前と人数 の関係

(2) 秒速 10 m の自転車

1	2	4	7	10
10	20	40	70	100

経過した時間と進んだ距離 の関係

(3) 10 cm のなすびを切る

1	3	5	6	8
9	7	5	4	2

切った長さと残りの長さ の関係

結果

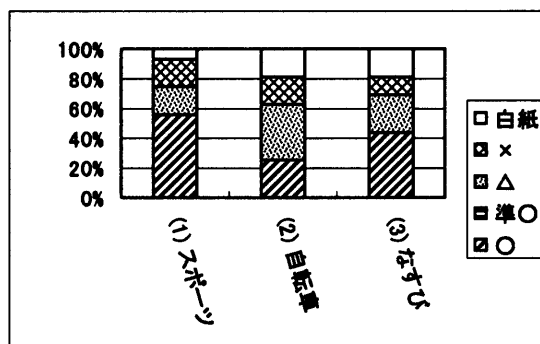
市立 K 中学校 1 年 (16 人)

問題内容	(1) スポーツ	(2) 自転車	(3) なすび
○	9人 (56.3%)	4 (25.0)	7 (43.8)
準○	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)
△	3 (18.8)	6 (37.5)	4 (25.0)
×	3 (18.8)	3 (18.8)	2 (12.5)
白紙	1 (6.3)	3 (18.8)	3 (18.8)

正答率：スポーツ 56.3 %

自転車 25.0 %

なすび 43.8 %



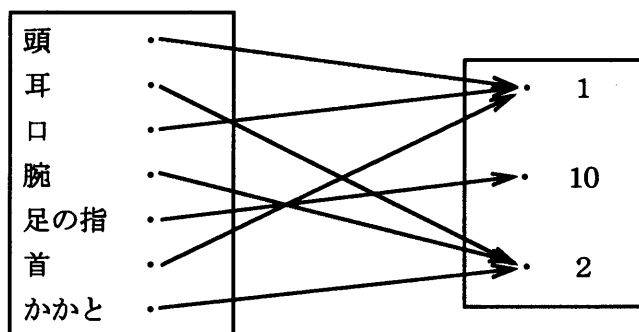
考察

関係を挙げることは、できていない。特に(2)(3)に関しては、与えられた対応表が数字のみであるために(1)よりも、正答率が低くなったと予想される。

⑤, ⑥, ⑦は対応関係を結ぶ問題である。それぞれの調査内容を示し、3問をまとめた結果と考察を述べる。

⑤ 対応(1対1)

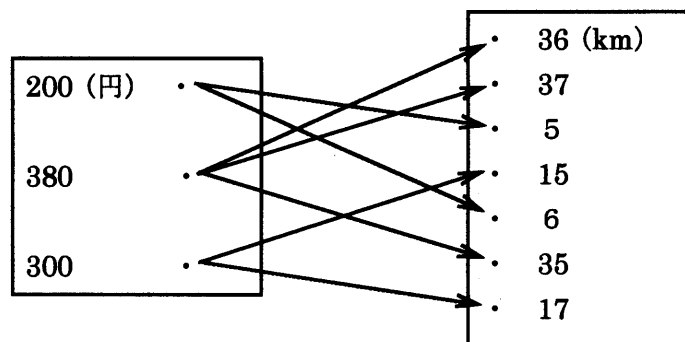
体の部分とその個数で、対応するものすべてを線で結んでください。



⑥ 対応(1対多)

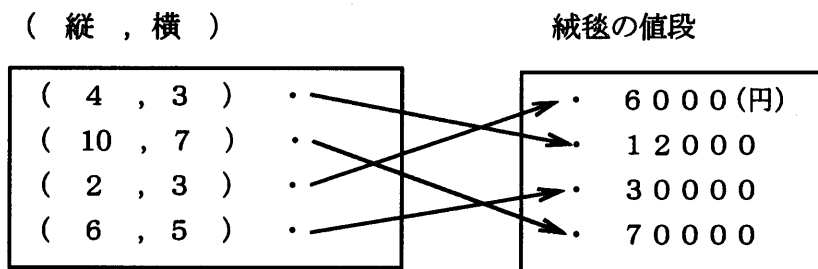
電車の運賃と乗車距離で、対応するものどうしをすべて線で結んでください。
(次の電車の運賃表を見て答えてください)

運賃 (円)	乗車距離 (km)	運賃 (円)	乗車距離 (km)
150	1 ~ 3	340	23 ~ 28
200	4 ~ 7	360	29 ~ 34
260	8 ~ 12	380	35 ~ 40
300	13 ~ 17	390	41 ~ 46
320	18 ~ 22	400	47 ~ 52



7 対応（多変数の対応）

カーペットの値段が、「縦の長さ(m)×横の長さ(m)×1000」(円)で決まるとします。このとき、縦と横の長さの組と、そのときのカーペットの値段を線で結んでください。



結果

3つの問題の正答人数、正答率の表と、グラフを示す。

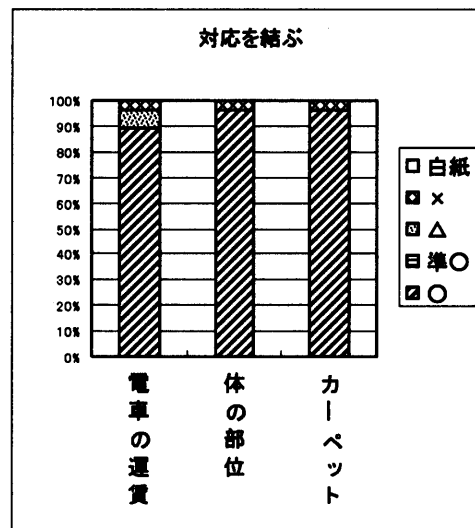
M 中学校 (28 名)

問題内容	電車の運賃	体の部位	カーペット
○	25人 (89.3%)	27 (96.4)	27 (96.4)
準○	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)
△	2 (7.1)	0 (0.0)	0 (0.0)
×	1 (3.6)	1 (3.6)	1 (3.6)
×白	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)

正答率；電車の運賃 89.3 %

体の部位 96.4 %

カーペット 96.4 %



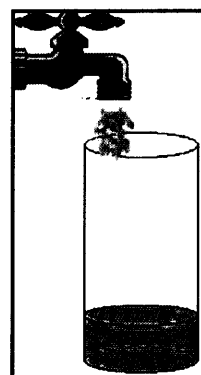
考察

5, 6の対応関係を結ぶことは容易にできている。また7についても、多変数の対応関係であったが、十分に正答できていた。

8 定義（文章）

文章を読み，a，bを選び，また，選んだ理由も簡単に書いてください。

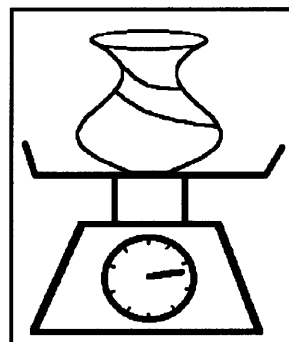
- (1) 円筒形の容器に水をためていきます。入れはじめから時間をはかり，水の高さと時間の関係を考えることにしました。時間から水の高さへの対応は（水の高さは時間の）関数といえますか。



- (a) 関数といえる b 関数とはいえない

理由： 時間に対して，水の高さが一つに決まる

- (2) 右のような形のつぼに砂を入れて重さをはかります。砂の量からつぼ全体の重さへの対応は（つぼ全体の重さは砂の量の）関数といえますか。



- (a) 関数といえる b 関数とはいえない

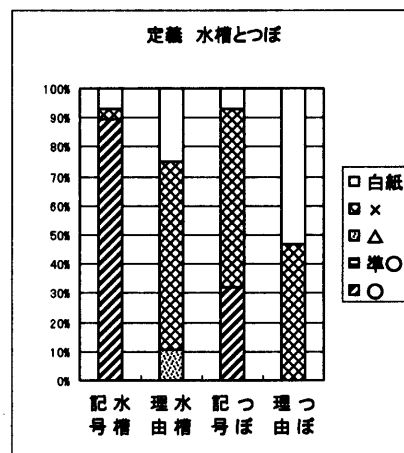
理由： 砂の量に対して，つぼ全体の重さが一つの値に定まる

結果

市立 K 中学校 2 年（28）

問題内容	水槽 記号	水槽 理由	つぼ 記号	つぼ 理由
○	25 (89.3)	0 (0.0)	9 (32.1)	0 (0.0)
準○	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)
△	0 (0.0)	3 (10.7)	0 (0.0)	0 (0.0)
×	1 (3.6)	18 (64.3)	17 (60.7)	13 (46.4)
白紙	2 (7.1)	7 (25.0)	2 (7.1)	15 (53.6)

正答率：(1) 記号 89.3%，(1) 理由 0.0%，
(2) 記号 32.1%，(2) 理由 0.0%

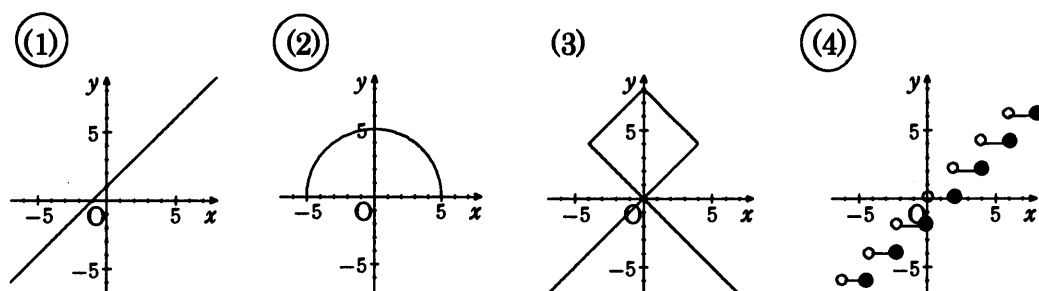


考察

⑤～⑦で対応を結ぶことはできたが、その対応関係と定義が結びついていないといえる。また、(1)は関数である、(2)は関数ではないという生徒の解答から、見たことがあるものは関数である、と判断していることが予想される。

⑨ 定義 (グラフ)

x から y への対応を考え、その対応のグラフが次のようになる時、関数のグラフといえるのはどのグラフでしょうか。すべて選び、番号を○で囲んでください。



結果

M 中学校 2 年 (28 名)

大問 4 についての調査結果を示す。この問題についての調査結果は、正答率ではなく、それぞれのグラフをどの程度の生徒が関数のグラフと考えたか、その人数と全体(28 名)に占める割合を表示する。

問題内容	(1)	(2)	(3)	(4)
関数と判断	24人 (85.7%)	3 (10.7)	8 (28.6)	16 (57.1)

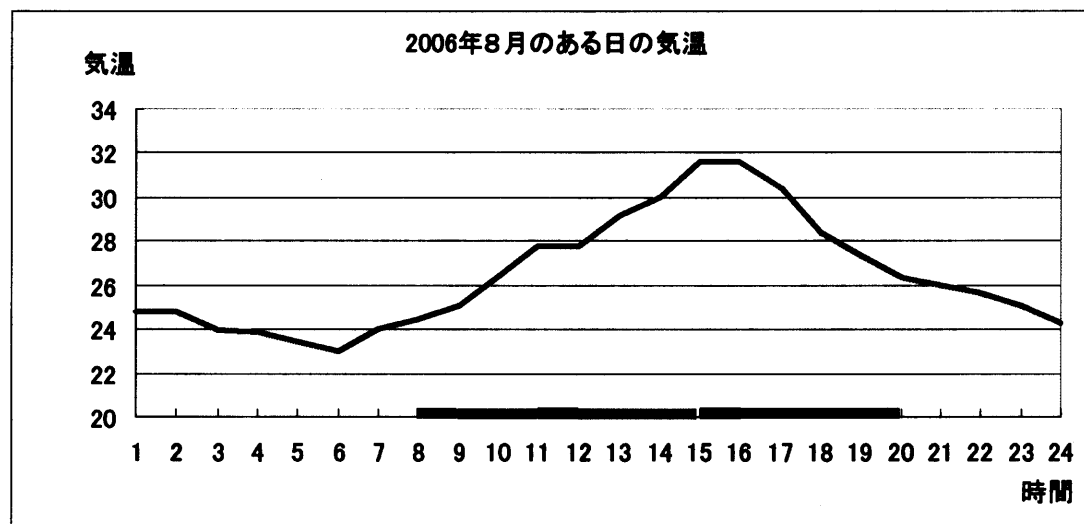
なお、すべて正答であった生徒は 1 名であった。

考察

グラフによる定義の理解に関しても、⑧と同様に、定義を理解していないことがわかる。また、(1)や(4)を関数のグラフと判断する生徒が多いことから、見たことがあるものが関数であると判断していることが予想される。

10 増減（気温のグラフ）

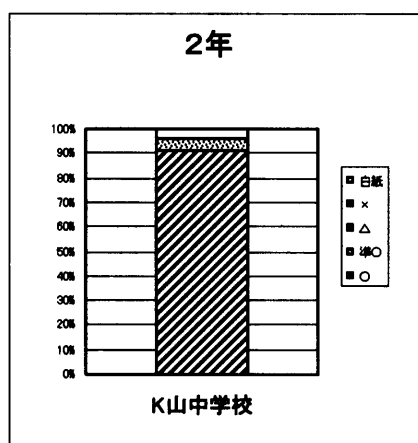
次の図はある日の京都の気温を表しています。朝の10時から夜の20時までの気温の変化のうち、気温が増加している時間帯には赤色を、減少している時間帯には青色を、一定である時間帯には黒色を塗ってください。



結果

K 山中学校 2 年生 (23 人)

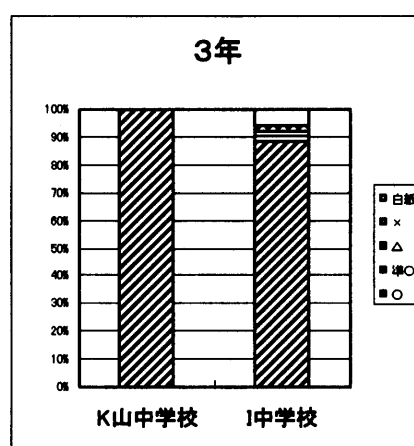
学校名	K山中学校
○	21 (91.3)
準○	0 (0.0)
△	1 (4.3)
×	0 (0.0)
白紙	1 (4.3)



正答率：91.3 %

3 年生 K 山中学校 (18 人), I 中学校 (52 人)

学校名	K山中学校	I中学校
○	18 (100.0)	46 (88.5)
準○	0 (0.0)	2 (3.8)
△	0 (0.0)	0 (0.0)
×	0 (0.0)	1 (1.9)
白紙	0 (0.0)	3 (5.8)



正答率：100.0 %

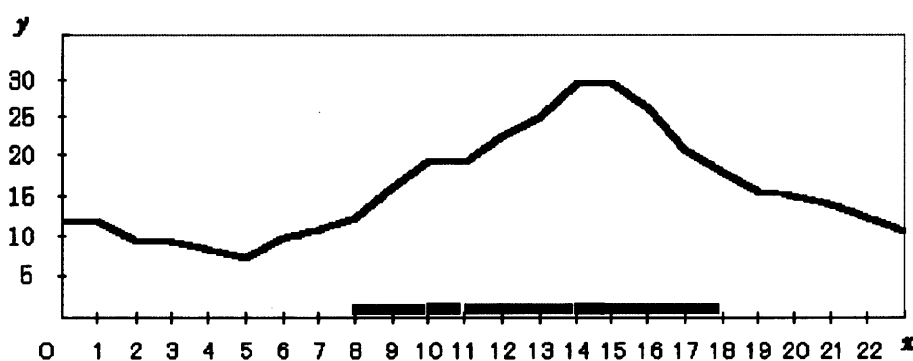
88.5 %

考察

2年生の段階であっても高い正答率であり、十分理解しており、グラフから増減を判断視することは容易にできると考える。

11 増減 (x-y グラフ)

次のグラフにおいて、xの値が8から18までの間で、yの値が増加している範囲には赤色を、減少している範囲には青色を、一定である範囲には黒色を塗ってください。



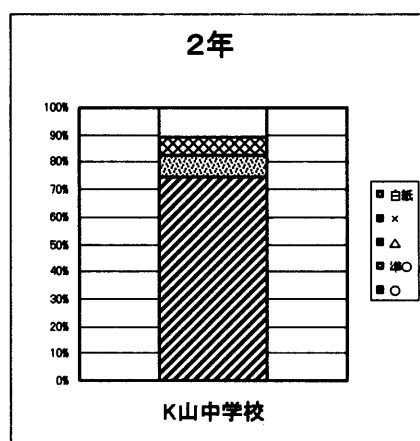
結果

K 山中学校 2 年 (62 名)

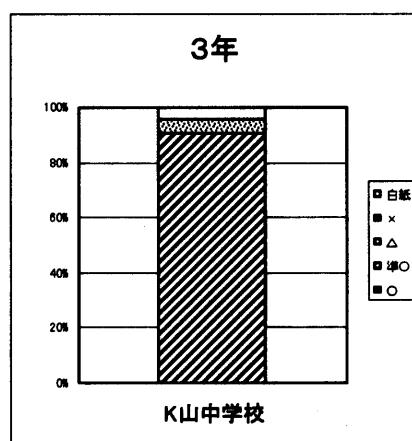
学校名	K山中学校
○	46 (74.2)
準○	0 (0.0)
△	5 (8.1)
×	4 (6.5)
白紙	7 (11.3)

K 山中学校 3 年 (22 名) 3 年

学校名	K山中学校
○	20 (90.9)
準○	0 (0.0)
△	1 (4.5)
×	0 (0.0)
白紙	1 (4.5)



正答率 : 74.2 %



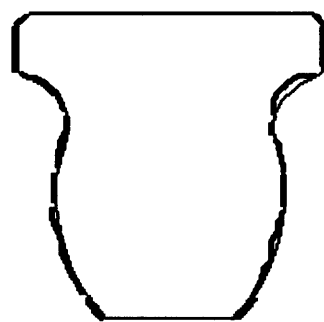
正答率 : 90.0 %

考察

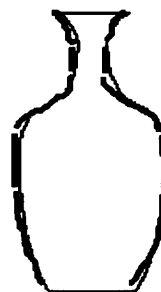
2年生と3年生で若干の正答率の違いはあるが、2年生の段階でも十分高い正答率を示していると考えられる。また、「京都の気温」という実際の現象を条件に加えた問題の正答率と比較しても大差はなく、この学年では問題文や条件による影響を受けることがないことがわかる。

12 増減（図を観察）

次のような“つぼ”があります。この図を見て答えてください。



「下から上へ」



「上から下へ」

- (1) 左側の“つぼ”には「下から上へ」と見ていき、横幅が増加しているところは赤色を、減少しているところは青色を、一定のところは黒色を塗ってください。
- (2) 右側の“つぼ”には「上から下へ」と見ていき、横幅が増加しているところは赤色を、減少しているところは青色を、一定のところは黒色を塗ってください。

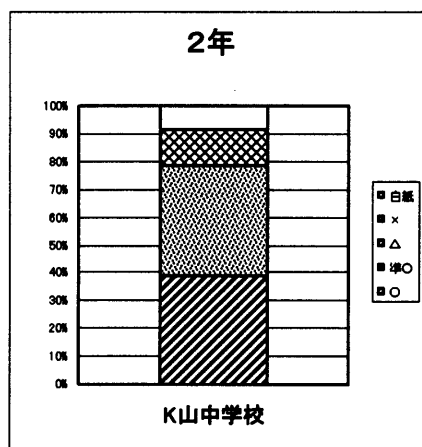
結果

(1) 2年 K山中学校 (23名)

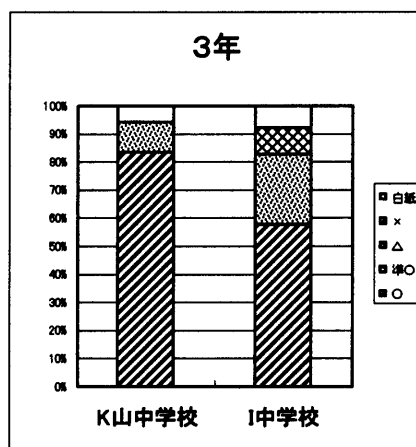
学校名	K山中学校
○	9 (39.1)
準○	0 (0.0)
△	9 (39.1)
×	3 (13.0)
白紙	2 (8.7)

3年 K山中学校 (18人), I中学校 (52人)

学校名	O中学校	I中学校
○	15 (83.3)	30 (57.7)
準○	0 (0.0)	13 (25.0)
△	2 (11.1)	0 (0.0)
×	0 (0.0)	5 (9.6)
白紙	1 (5.6)	4 (7.7)



正答率 : 39.1 %



正答率 : 83.3 %

57.7 %

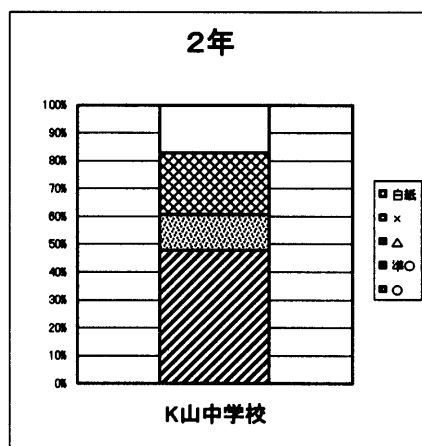
(2) 2年 K山中学校 (23名)

3年 3年 K山中学校 (18人),

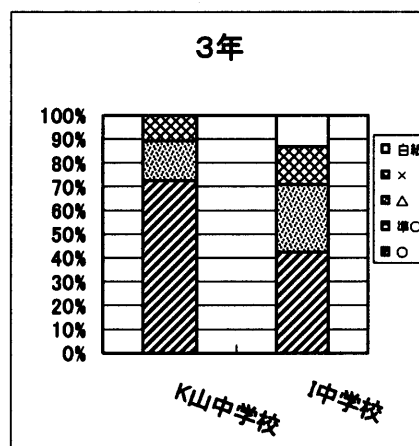
I中学校 (52人)

学校名	K山中学校
○	11 (47.8)
準○	0 (0.0)
△	3 (13.0)
×	5 (21.7)
白紙	4 (17.4)

学校名	O中学校	I中学校
○	13 (72.2)	22 (42.3)
準○	0 (0.0)	0 (0.0)
△	3 (16.7)	15 (28.8)
×	2 (11.1)	8 (15.4)
白紙	0 (0.0)	7 (13.5)



正答率 : 47.8 %



正答率 : 72.2 %

42.3 %

考察

10, 11 と比較すると、グラフは読みなれているために増減の正答率が高いが、実際の図や絵などを観察して増減を判断し、それを表す力は十分についていないことがわかる。実測や観察を通して、増加や減少を読み取る経験を豊富に行う必要が

あると考える。

13 変化量と変化の割合（式から求める）

次のそれぞれの関数において、 x の値が-3から2まで変化するときの y の値の変化量、及び変化の割合を求めてください。

(1) $y=3x-2$

(2) $y=4$

(3) $2x+y-4=0$

y の変化量 15

y の変化量 0

y の変化量 -10

変化の割合 3

変化の割合 0

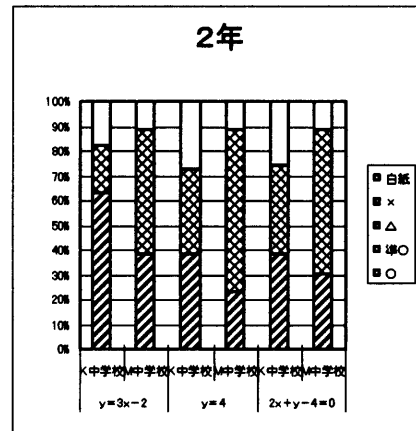
変化の割合 -2

結果

(変化量についての結果)

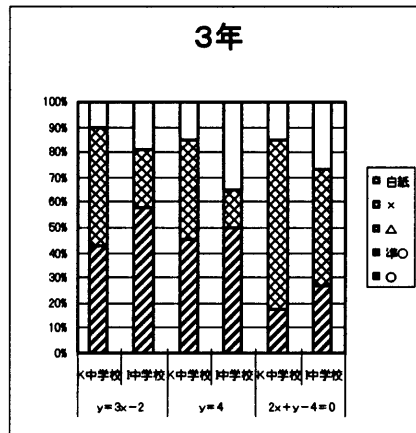
2年 K山中学校 (62名), M中学校 (26名)

	$y=3x-2$		$y=4$		$2x+y-4=0$	
学校名	K山中学校	M中学校	K山中学校	M中学校	K山中学校	M中学校
○	39 (62.9)	10 (38.5)	24 (38.7)	6 (23.1)	24 (38.7)	8 (30.8)
準○	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)
△	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)
×	12 (19.4)	13 (50.0)	21 (33.9)	17 (65.4)	22 (35.5)	15 (57.7)
白紙	11 (17.7)	3 (11.5)	17 (27.4)	3 (11.5)	16 (25.8)	3 (11.5)



3年 K山中学校 (40名), I中学校 (52名)

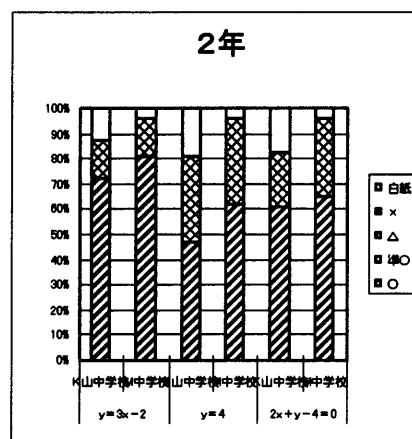
	$y=3x-2$		$y=4$		$2x+y-4=0$	
学校名	K山中学校	I中学校	K山中学校	I中学校	K山中学校	I中学校
○	17 (42.5)	30 (57.7)	18 (45.0)	26 (50.0)	7 (17.5)	14 (26.9)
準○	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)
△	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)
×	19 (47.5)	12 (23.1)	16 (40.0)	8 (15.4)	27 (67.5)	24 (46.2)
白紙	4 (10.0)	10 (19.2)	6 (15.0)	18 (34.6)	6 (15.0)	14 (26.9)



(変化の割合についての結果)

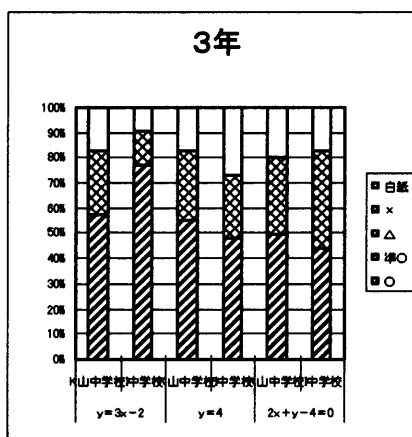
2年 K 山中学校 (62 名), M 中学校 (26 名)

	$y=3x-2$		$y=4$		$2x+y-4=0$	
学校名	O中学校	M中学校	O中学校	M中学校	O中学校	M中学校
○	45 (72.6)	21 (80.8)	29 (46.8)	16 (61.5)	38 (61.3)	17 (65.4)
準○	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)
△	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)
×	9 (14.5)	4 (15.4)	21 (33.9)	9 (34.6)	13 (21.0)	8 (30.8)
白紙	8 (12.9)	1 (3.8)	12 (19.4)	1 (3.8)	11 (17.7)	1 (3.8)



3年 K 山中学校 (40 名), I 中学校 (52 名)

	$y=3x-2$		$y=4$		$2x+y-4=0$	
学校名	K山中学校	I中学校	K山中学校	I中学校	K山中学校	I中学校
○	23 (57.5)	40 (76.9)	22 (55.0)	25 (48.1)	20 (50.0)	23 (44.2)
準○	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)
△	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)
×	10 (25.0)	7 (13.5)	11 (27.5)	13 (25.0)	12 (30.0)	20 (38.5)
白紙	7 (17.5)	5 (9.6)	7 (17.5)	14 (26.9)	8 (20.0)	9 (17.3)



考察

変化量, 変化の割合とも十分に身につけていないと考えられる。特に, (1)よりも(2)(3)の方が正答率が低くなっており, これらを打開する必要がある。

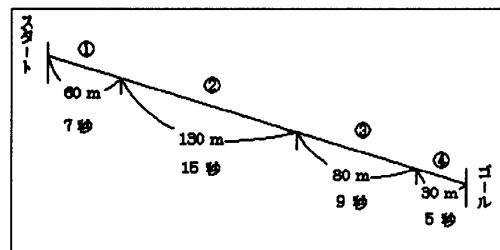
変化量と変化の割合を比べると, 変化の割合の方が正答率が高くなっている。生徒は, 「一次関数での変化の割合」 = 「傾き ($y=ax+b$ の a)」と記憶していることから, このような結果になったと予想される。変化の様子を考察するという意識がないことが予想される。

14 変化の割合（文章題）

スィム君はウォータースライダーに乗ることにしました。スタート地点に全長 300 m のコース図がありました。

問1 最も流れの速い区間は①～④の何番でしょうか。

答え： ③



コース図

問2 問1でどのように考えたか、簡単に書いてください。

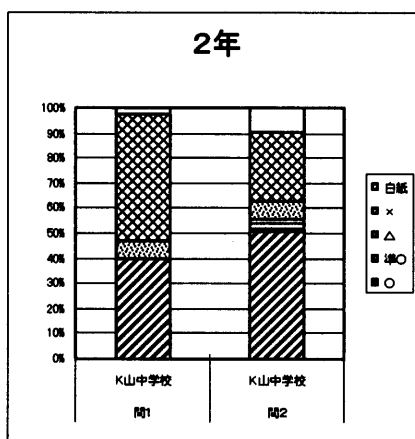
答え

それぞれ距離を時間で割る。その値が最も大きい区間が、最も流れが速い場所である。

調果

2年 K山中学校 (43名)

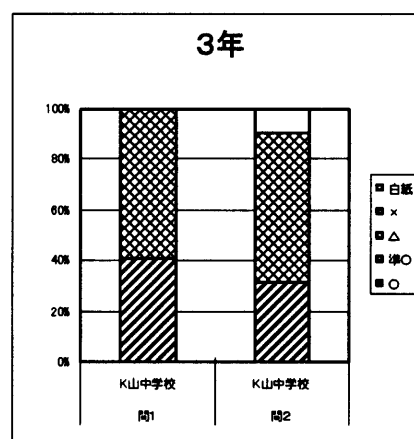
	問1	問2
学校名	K山中学校	K山中学校
○	17 (39.5)	22 (51.2)
準○	0 (0.0)	2 (4.7)
△	3 (7.0)	3 (7.0)
×	22 (51.2)	12 (27.9)
白紙	1 (2.7)	4 (9.3)



正答率：問1 39.5 %
問2 51.2 %

3年 K山中学校 (22名)

	問1	問2
学校名	K山中学校	K山中学校
○	9 (40.9)	7 (31.8)
準○	0 (0.0)	0 (0.0)
△	0 (0.0)	0 (0.0)
×	13 (59.1)	13 (59.1)
白紙	0 (0.0)	2 (9.1)



正答率：問1 40.9 %
問2 31.8 %

考察

13の変化の割合と比較すると、正答率が低くなっており、式で求めていることと、現象の考察で行うことと結びついていないことが予想される。また、理由の間1は正答しているが、間2は不正解ということから、変化の割合で求めている意味を理解していないことが予想される。

追調査

15 変化の割合（文章題）

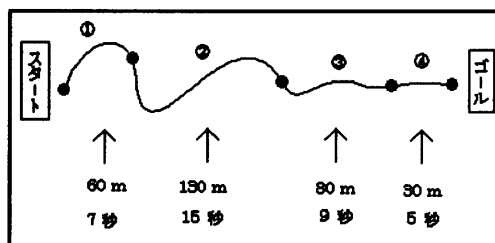
14では、図によって正誤が左右されてしまっていたという懸念が生じたため、図を変更して追調査を行った。

スイム君はウォータースライダーに乗ることにしました。スタート地点に全長300 mのコース図がありました。コース図は上から見た図で、各ポイント(●)間の長さとかかる時間が書いてあります。

- (1) 最も流れの速い区間は①～④の何番でしょうか。

答え： ③

- (2) (1)でどのように考えたか、簡単に書いてください。



コース図

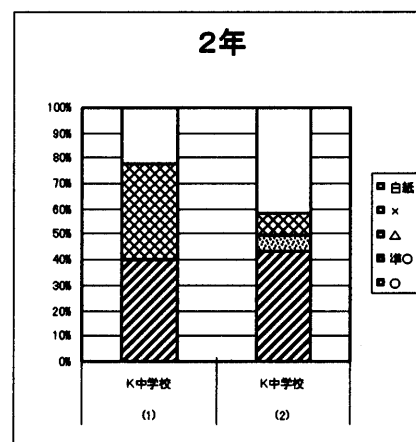
それぞれ距離を時間で割る。その値が最も大きい区間が、最も流れが速い場所である。

結果

2年 K 中学校 (67 名)

学校名	K中学校	K中学校
○	27 (40.3)	29 (43.3)
準○	0 (0.0)	0 (0.0)
△	0 (0.0)	4 (6.0)
×	25 (37.3)	6 (9.0)
白紙	15 (22.4)	28 (41.8)

正答率：40.3 %



考察

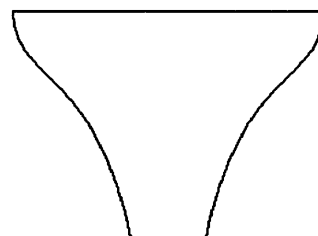
15 とほぼ同様の結果となっている。やはり、変化の割合の意味を十分に理解しているとはいえないことが予想される。

16 変化の割合（文章題）

図のような形をした花びんがあります。

やすよさんは「花びんの高さと同幅の関係」について表を作成しました。

この表をもとに各問に答えてください。



やすよさんの作成した表

高さ(cm)	0	1	3	7	13	20	22	24	27	28	34
横幅(cm)	11	11	12	15	19	27	30	35	40	42	46

- (3) 横幅が最も増加している場所、横幅が最も急激に増加している場所はそれぞれ何 cm から何 cm のところですか。（高さの範囲を書いてください。）

横幅が最も増加している場所 13 cm から 20 cm までの場所

横幅が最も急激に増加している場所 22 cm から 24 cm までの場所

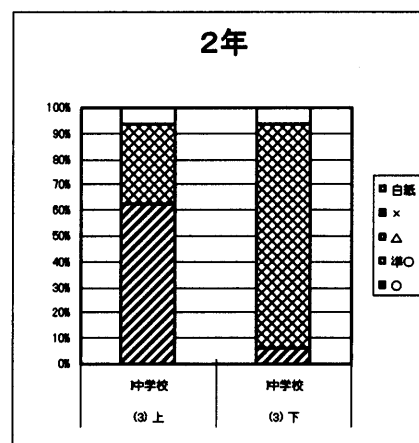
結果

2年 I 中学校(16 名)

	(3) 上	(3) 下
学校名	I 中学校	I 中学校
○	10 (62.5)	1 (6.3)
準○	0 (0.0)	0 (0.0)
△	0 (0.0)	0 (0.0)
×	5 (31.3)	14 (87.5)
白紙	1 (6.3)	1 (6.3)

正答率：上 62.5 %

下 6.3 %



考察

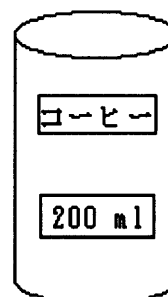
[14], [15] では、時間と距離の関係（速さ）に
関しての変化の割合を問う問題であったが、本問題では、それ以外のあまり見慣れ
ない問題で変化の割合について調査を行った。本問題では、正答率が [14], [15] より
も低く、このことから変化の割合の意味を十分に理解していないことが予想され
る。

[17] 多変数関数（変化の仕方）

200 ml 入りのコーヒーの缶があります。次の問いに答えてください。

- (1) 缶の中に入るコーヒーの量をほんの少しだけ増やしたいとき、
コーヒー缶の高さと半径をどのように変化させたら良いでしょう
か。考えられる手段を5つ書いてください。

注) 缶の高さを 1 cm 増やす, 2 cm 増やす, 3 倍に増やすなどは
すべて「缶の高さを増やす」として, 1 つと考えます。

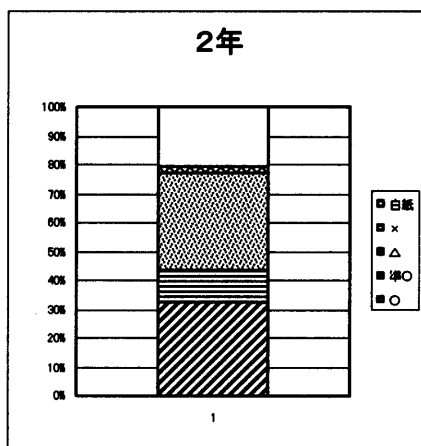


- ① 高さを高くする。
- ② 半径を増やす。
- ③ 高さを高くして, 半径を増やす。
- ④ 高さを高くして, 半径を減らす。
- ⑤ 高さを低くして, 半径を増やす。

結果

2年 K山中学校 (62名)

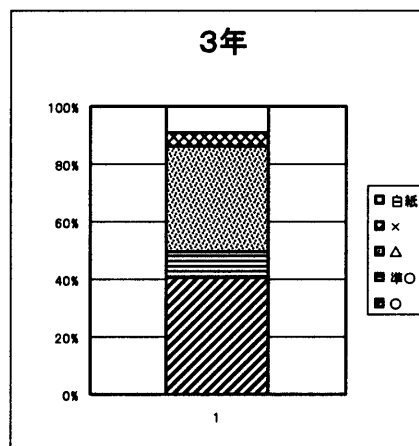
	(1)	(2) 記号	(2) 理由
学校名	K山中学校	K山中学校	K山中学校
○	20 (32.3)	10 (16.1)	0 (0.0)
準○	7 (11.3)	22 (35.5)	1 (1.6)
△	21 (33.9)	0 (0.0)	6 (9.7)
×	1 (1.6)	16 (25.8)	34 (54.8)
×白	13 (21.0)	14 (22.6)	21 (33.9)



正答率 : 32.3 %

3年 K山中学校 (22名)

	(1)	(2) 記号	(2) 理由
学校名	K山中学校	K山中学校	K山中学校
○	9 (40.9)	1 (4.5)	0 (0.0)
準○	2 (9.1)	16 (72.7)	0 (0.0)
△	8 (36.4)	0 (0.0)	9 (40.9)
×	1 (4.5)	2 (9.1)	9 (40.9)
×白	2 (9.1)	3 (13.6)	4 (18.2)



正答率 : 40.9 %

考察

2つの変量について、一方を増加させもう一方を減少させるという考え方ができている生徒は4割弱である。両方を増加させて考えている生徒は1割ほどである。この2つの考えを合わせると5割程度であり、約半数の生徒が多変数関数の考え方が素朴的にできているといえる。また、学年でそれほど違いはなく、2年でも多変数関数の導入の可能性があると考えられる。

18 多変数関数（式を求める）

1本 150 円の飲み物を x 本，1個 100 円のおにぎりを y 個，1個 30 円のお菓子を z 個買いました。

このときの合計金額を A 円とし， A を x ， y ， z を使って式で表しなさい。

式： $A=150x+100y+30z$

結果

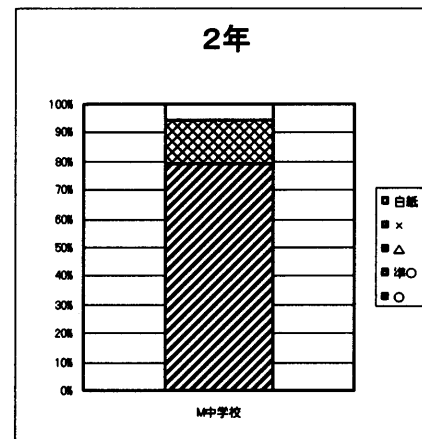
2年 M 中学校（53 名）

学校名	M中学校
○	42 (79.2)
準○	0 (0.0)
△	0 (0.0)
×	8 (15.1)
×白	3 (5.7)

正答率：79.2 %

考察

17 では，半数の生徒が正答であったが，式を立てることは，8割の生徒が正答である。多変数関数の式を利用して学習を行うことは，十分に可能であると考ええる。

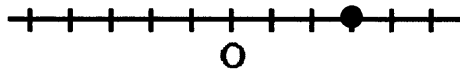


19 ~ 22 では、すべて座標に関する問題となっており、一括して表に表すこととする。

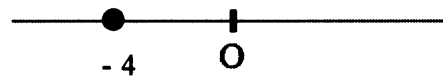
19 座標（数直線）

次の数を、下の数直線に表してください。

(1) 3



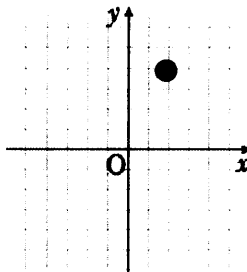
(2) -4



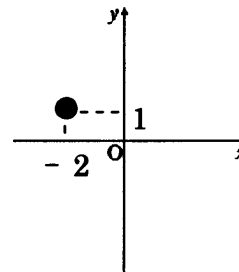
20 座標（平面）

次の座標を、下の座標平面に表してください。

(1) (2, 4)



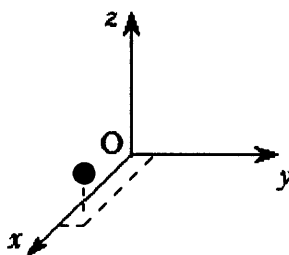
(2) (-2, 1)



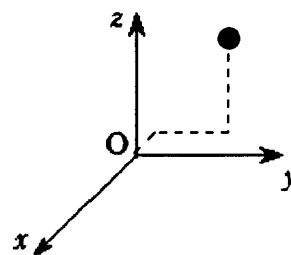
21 座標（空間）

次の座標を、下の座標空間に表してください。

(1) (4, 1, 2)



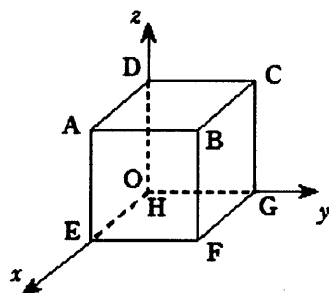
(2) (-1, 3, 5)



22 座標（空間の応用）

図は1辺が1の立方体です。A, B, F, Gの点の座標を求めなさい。

ただし、Oは原点であり、OとHは同じ点です。



A (1 , 0 , 1)

B (1 , 1 , 1)

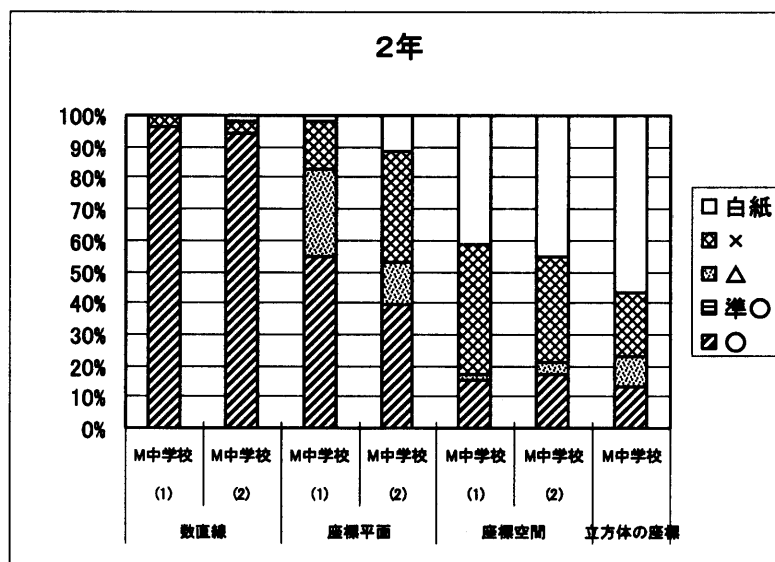
F (1 , 1 , 0)

G (0 , 1 , 0)

結果

2年 M中学校 (53名)

	数直線(1)	数直線(2)	座標平面(1)	座標平面(2)	座標空間(1)	座標空間(2)	座標空間
学校名	M中学校						
○	51人 (96.2%)	50 (94.3)	29 (54.7)	21 (39.6)	8 (15.1)	9 (17.0)	2 (13.2)
準○	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)
△	0 (0.0)	0 (0.0)	15 (28.3)	7 (13.2)	1 (1.9)	2 (3.8)	5 (9.4)
×	2 (3.8)	2 (3.8)	8 (15.1)	19 (35.8)	22 (41.5)	18 (34.0)	11 (20.8)
白紙	0 (0.0)	1 (1.9)	1 (1.9)	6 (11.3)	22 (41.5)	24 (45.3)	30 (56.6)



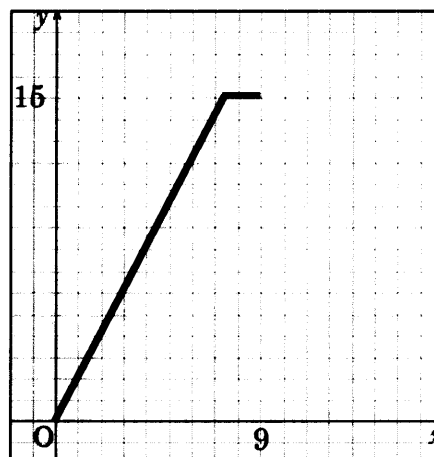
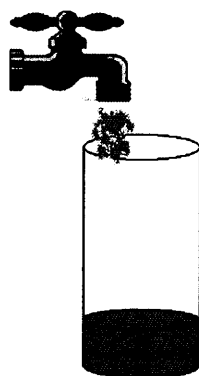
考察

1次元→2次元→3次元と正答率が低くなっている。座標平面は学習済であるが、正答率が5割で低い結果となっている。座標空間に関しては、未習であるが2割程度の生徒が正答しており、予想よりも正答率が高い。空間まで含めた座標の学習が行える可能性があると考えられる。

23 現実事象をグラフに表す

高さが 15cm ある円筒形の容器に、毎秒 2 cm ずつたまる速さでためていき、9 秒間水をいれました。

時間の経過と水の高さの関係をグラフに表してください。

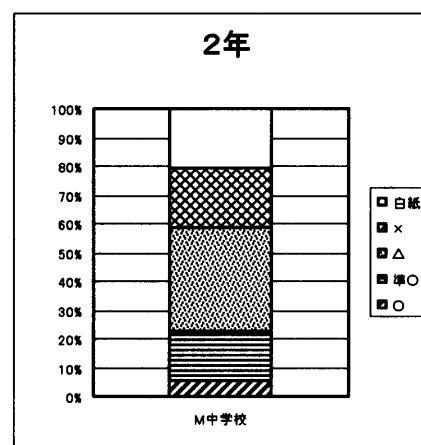


結果

2年 M 中学校 (53 名)

学校名	M中学校
○	3 (5.7)
準○	9 (17.0)
△	19 (35.8)
×	11 (20.8)
白紙	11 (20.8)

正答率：5.7 %



考察

正答率は低かった。生徒は、教科書にあるような、すべて直線のグラフをかいていた。実際の現象へグラフを活用する能力が身につけていないことが予想される。実験や観測を十分に行って、グラフなどを移用する経験を積ませる必要があると考える。

24 関数の技能（定義域，値域，対応表，式）

1

1 分間に 2 cm ずつ燃えていく 12 cm の線香があります。この線香に火をつけ、1 分間ごとに線香の長さをはかり、10 分間観察しました。

(1) 燃え尽きるまで何分かかるでしょうか。 6 分

(2) 線香の長さが最も長いとき，最も短いときはそれぞれ何 cm でしょうか。

最も長いとき 12 cm 最も短いとき 0 cm

(3) この関係を表にまとめてください。

時間(分)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
線香の残りの長さ(cm)	2	10	8	6	4	2	0	0	0	0	0

(4) 時間を x (分)，燃えた線香の長さを y (cm) として，この関係を式に表してください。

式： $y = 2x$

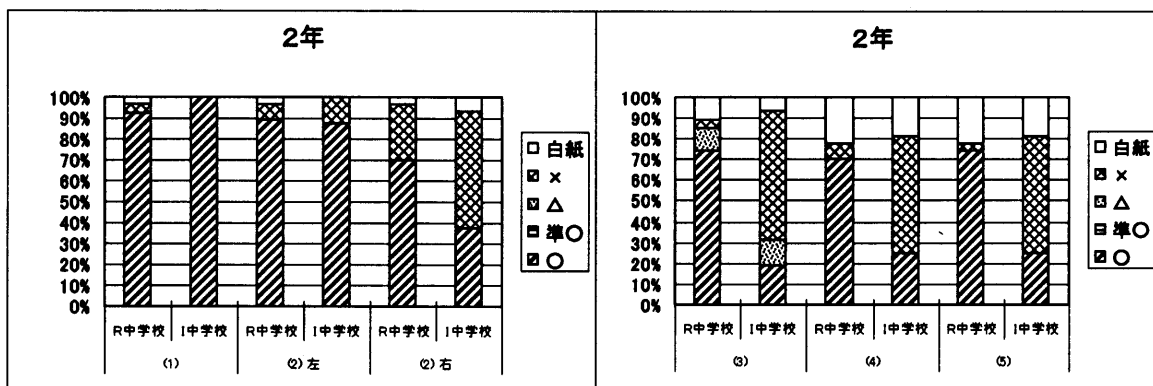
(5) 時間を x (分)，残っている線香の長さを y (cm) として，この関係を式に表してください。

式： $y = 12 - 2x$

結果

2 年 R 中学校 (27 名)，I 中学校 (18 名)

	(1)		(2) 左		(2) 右		(3)		(4)		(5)	
学校名	R中学校	I中学校	R中学校	I中学校	R中学校	I中学校	R中学校	I中学校	R中学校	I中学校	R中学校	I中学校
○	25 (92.8)	16 (100.0)	24 (88.9)	14 (87.5)	19 (70.4)	6 (37.5)	20 (74.1)	3 (18.8)	19 (70.4)	4 (25.0)	20 (74.1)	4 (25.0)
準○	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)
△	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	3 (11.1)	2 (12.5)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)
×	1 (3.7)	0 (0.0)	2 (7.4)	2 (12.5)	7 (25.9)	9 (56.3)	1 (3.7)	10 (62.5)	2 (7.4)	9 (56.3)	1 (3.7)	9 (56.3)
白紙	1 (3.7)	0 (0.0)	1 (3.7)	0 (0.0)	1 (3.7)	1 (6.3)	3 (11.1)	1 (6.3)	6 (22.2)	3 (18.8)	6 (22.2)	3 (18.8)



考察

学校間の差はあるが、(1)定義域や(2)値域などは判断できており、正答率が高い。(3)表作成や(4)(5)式を求めることなどの正答率は低くなっている。表作成では、線香が燃え尽きた時点で作成をやめてしまうという誤答が多く見られた。このことから、実際の現象を観察して、増加や減少だけではなく、変化が一定の場合も表にまとめる、という経験を積ませる必要があると考える。また、一次関数の式を求める問題の正答率も低く、この点に関しても教育内容を考える必要があろう。

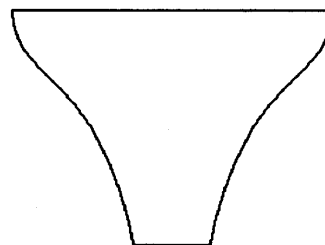
25 関数の技能（対応図，増加量）

図のような形をした花びんがあります。

やすよさんは「花びんの高さと横幅の関係」に

ついて表を作成しました。

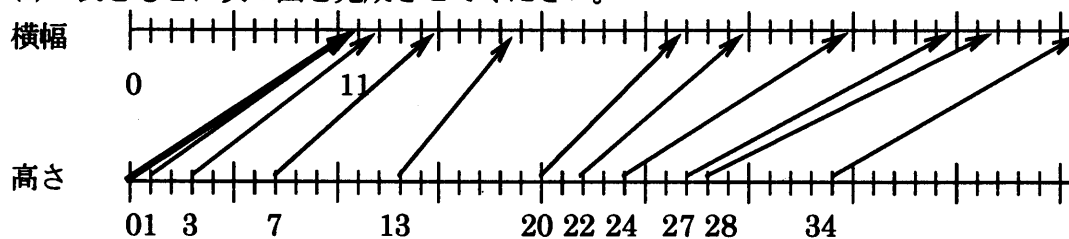
この表をもとに各問に答えてください。



やすよさんの作成した表

高さ(cm)	0	1	3	7	13	20	22	24	27	28	34
横幅(cm)	11	11	12	15	19	27	30	35	40	42	46

(1) 表をもとに次の図を完成させてください。



(2) 高さが 7 cm から 13 cm まで増加したとき、

横幅は何 cm 増加していますか。

4 cm

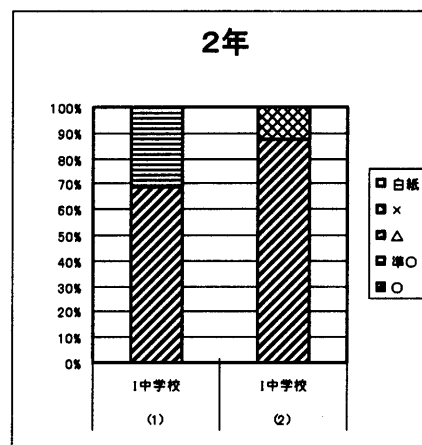
結果

2年 I 中学校 (16 名)

	(1)	(2)
学校名	I中学校	I中学校
○	11 (68.8)	14 (87.5)
準○	5 (31.3)	0 (0.0)
△	0 (0.0)	0 (0.0)
×	0 (0.0)	2 (12.5)
白紙	0 (0.0)	0 (0.0)

正答率：(1) 68.6 %

(2) 87.5 %



考察

この問題は未習の内容であるが、対応図をかくこと、そこから増加量を求めることはできていると考える。

2-1-4. 調査のまとめ

以上の調査から、現在の中学生の理解が不十分であると考えられる点を挙げると次のようになる。

- ・連続的な変化
- ・関数の定義
- ・ x と y で表された式をもとに、変化量や変化の割合を求める
- ・変化の割合（時間と距離、高さと横幅）
- ・多変数の変化の仕方を考える
- ・座標を平面や空間に表す
- ・現象をグラフに表す
- ・表を作成する
- ・式を求める

これらを打開するような教育内容を開発し、実践していくこととする。

3節 まとめ-現行カリキュラムの問題点を打開する視点-

1節より、現行のカリキュラム及び教育内容は、1970年ころから行われている内容とほぼ同様のものであることがわかった。そして2節より、現行の内容を学習した生徒は、本来関数で学習すべき内容についての理解が不十分であることが明らかとなった。特に、連続的な変化、関数の定義、多変数関数、座標（平面や空間）などは、現行カリキュラムでは扱われていない内容であるため、正答率がほぼ 0.0 %の結果を示すものもあった。また、変化の割合を求めること、現象をグラフに表すことなどは、現行のカリキュラムで扱われているにもかかわらず正答率が低い。よって、これらの問題点を打開できるようなカリキュラムの開発が必要であると考ええる。

そこで次章では、カリキュラムを開発・提案し、教育実験によってその妥当性を検証することとする。

第3章 新しく提案するカリキュラムとその実践

従来、関数の学習はグラフを中心に学習されてきた。そのため、生徒は関数＝グラフという認識となっており、関数において本来学習すべき、現実事象から変量を取り出し、変化の様子の考察するなど能力に乏しいことが問題点として挙げられた。

本章では、1節で現在のカリキュラム及び教育内容の問題点を打開するべく、新たなカリキュラムを提案する。2節では、カリキュラムの一部について教育実験を行う。3節では、教育実験の結果から、提案したカリキュラムの妥当性を検証する。

1節 提案するカリキュラムの内容

関数教育において、本来、現実事象の変化を考察する能力の育成が大切である。そのために、とりわけ中学校段階において多変数関数を中心とした、以下のようなカリキュラムを提案することとする。その際、小学校段階で学習するべきと筆者が考えている関数の基礎的な内容についても簡単に載せることとする。

表 12：提案するカリキュラム

学年	学習内容	学習する関数	学習する数学的内容			
			量	集合、対応	変化	式、対応表、図
小学校	中学年 実測を行い、式表示できない関数もふくめ、値の変化の様子を学習する	(式で表せるもの) (式で表せないもの) 比例<言葉の式>	1変量 多変量 離散 有限	要素とその関係 1変量の対応 多変量の対応 一意対応と定義(集合)	変量の抽出 伴って変わる量の抽出 増加、減少、一定(数値) 変化の割合(数値)	対応表 対応図 座標(正の数の範囲) グラフ(折れ線グラフなど) 言葉の式
	高学年					
中学校	1年 式で表すことができる関数の例として、比例、反比例の関係にある現象を学習する	比例<文字の式> 反比例	連続 無限	関数の定義 定義域、値域 増加、減少、一定(文字) 変化の割合(文字)	変数 変数 変数 変数	変数 文字の式 座標(負の数までの範囲)
	2年 比例の発展として一次関数の関係にある現象を学習する	一次関数				
	2年 一次関数の発展として、一次の多変数関数にある現象を学習する	一次の多変数関数			変量の固定 変数の固定	座標空間 立体グラフ
	3年 二次関数($y=ax^2$)の関係にある現象を学習する	二次関数				
	3年 二次関数の発展として、二次の多変数関数にある現象を学習する	二次の多変数関数				

小学校段階では、関数の定義を学習し、定義を押さえながら関数の学習を進めていく。これにより、生徒が「関数とはグラフのことである」といったような誤った認識をもたないようにする。現実事象の変化の考察は、初めの段階では実験や実測を行う。これにより、現実事象を考察する能力や態度の獲得ができるようになる。現実事象から変量を抽出や、伴って変わる量の抽出を行う。そして、抽出した変量について対応表、対応図、グラフ、式などで値の変化を考察する。初めの段階では、式表示できる関数のみではなく、式表示できない関数も学習し、生徒が「関数とは式で表せるものである」という誤った認識を持たないようにする。式表示できない関数と式表示できる関数を比較しながら、式表示できる

関数の性質について学習させる。

中学校では、小学校の内容の発展として、式表示できる関数について学習させる。比例や一次関数などを扱いながら、定義、変化の様子、変化の割合などを学習させる。変化の仕方にも着目させ、連続的な変化と離散的な変化も考える。

一次関数のあとに一次の多変数関数を、二次関数のあとに二次の多変数関数を学習させる。例えば一次の多変数関数を学習する際に、いくつかの変数が含まれているため、変数によって変化の様子が異なる。このことにより、1変数関数では変化の様子について定着しなかったとしても、多変数関数を行うことで変化の様子を再確認し、定着する可能性が考えられる。そのため、1変数関数のあとに多変数関数を適時学習させることとする。

2節 予備教育実験

提案したカリキュラムの検証のために、教育内容を開発する。本節では、開発した教育内容の妥当性を検証するため、予備教育実験を行うこととする。

3-2-1. 事前調査

日時：2006年12月

場所：生徒の自宅

対象：中学校3年生1名

手続き：ペーパーテスト形式で行う。時間は50分間である。

調査内容：

関数の定義，1次関数のグラフ・増加量・変化の割合，多変数関数の考え方についての調査を行った。

調査結果：

関数の定義		座標	1次関数のグラフ	増加量	変化の割合	2変数関数
記号	理由					
○	×	○	×	×	×	△

調査の結果，多くの問題で誤答が見られた。これらの結果について，教育実験後も調査を行い，教育内容の妥当性を検証することとする。

3-2-2. 予備教育実験

(1) 予備実験1回目

日時：2006年12月（約35分）

場所：生徒の自宅

対象：中学校3年生1名

本時の内容と展開および結果・考察

1. 「集合」について

まずは，集合と聞いて連想するものを挙げた。生徒は，人の集まりを連想していた。その後，数学における集合の定義について学習を行った。集合についての練習問題は，どのような集合であるのかを答える問題であった。この問題に関しては的確に回答していた。回答後，数学での集合では，要素が一つであっても集合と呼ぶことを伝えたと，意外に思っていた。

部分的な集合についても問題なく回答していた。要素を挙げる問題では，分離量は挙げることができていたが，連続量の要素を挙げることは困難であった。問題の意味がなかなか理解できなかったようである。問題の意味を把握してからは回答を行ったが，挙げた要

素はすべて整数で、少数を要素とすることはなかった。

2. 「関係」について

はじめに集合を表す別の記号を学習した。その後、集合の関係について問題練習を行った。問題を解く際、集合の要素を回答すればよいのか、集合自体の番号を回答すればよいのかを迷っていた。要素を学習した直後であったためと考えられる。一度教師が模範解答を示してから、生徒に考えさせる必要があると感じた。

次の集合の関係を自分で考える問題では、集合の各要素どうしが関係のない集合を最初にあげていた。前の問題練習を例に出すと問題を把握して、各集合の名前とその要素、集合どうしの関係を回答することができていた。

3. 「対応」について

対応関係を線で結ぶことは問題なく行っていた。しかし、対応の先と後を強調するための矢印は、一度つけるように注意をしたが、次の問題でもう一度付け忘れていた。矢印で強調する必要性を感じていないためであると考えられる。“～～から――への対応”という言い回しには少し抵抗があるようではあったが、徐々に慣れていって欲しいという言葉にうなずいていた。対応関係を結ぶ練習問題を行ったが、問題なく回答しており次のセクションの対応関係を結ぶことも先取りで行っていた。

ここで、対応関係が1対1、多対1であることを押さえたが、多対1の例が要素が2対1であったため、生徒は2対1に固執していた。一般的に2つ以上の要素のときのこともひっくるめて多対1ということを伝えると納得はしていたが、この対応を押さえるときの言い回しは丁寧に行う必要があると感じた。次の例では1対多の対応関係を扱ったが、これに関しては先の例を参考にしており、問題なく理解できたようである。この2種類の対応関係のうち、“一意対応であるものが関数”であるという定義を押さえると、生徒は新しい知識を得た感嘆の声をもらしていた。例2が関数の関係ではないことも納得していた。この後の練習問題では、3問中1問は問題を読み間違えて対応を結んでいた。その対応関係の状態で関数の関係を選ぶことは正答であった。間違っている対応関係を訂正してから、再び関数関係化どうかを判断しようとしたが、どの対応関係が関数の関係であるのか十分に理解しておらず、前頁に書いてある関数の定義を見直していた。そうして正答にいたった。3問中別の1問では、1対多の関係であったが、対応の前の集合の要素が2つあったため、生徒は初め2対多としていた。この問題は多対多と考えることもできるので、訂正の必要がある。

逆の対応では、対応関係を矢印で結ぶことは容易であった。もとの対応関係と逆の対応関係を考えたときに、もとは関数の関係であっても、逆は関数の関係でないものがあることについては、一意対応が関数であることが少し身についたのか、すぐに理解していた。

多変数の対応関係では、集合の記号 $\{ \}$ よりも、円で囲んだ集合の図の方がイメージがしやすいようであった。しかし、いくつかの集合の要素が合わさって一つの結果に対応していることが十分に定着しておらず、生徒に集合の図と対応の矢印をかかせる練習問題を

行ったが、それぞれの集合からばらばらに結果へといく矢印をかいていた。対応の前のいくつかの集合の要素が合わさって結果になることを伝えと、矢印をかき直していた。この点も問題を行う前に口頭でしっかり押さえておく必要があると感じた。多変数の対応関係の図を見て、関数の関係かどうかを質問したが、関数であると判断していた。対応の先がただ一つに決まるとき関数であることがこの時点で十分に身についたと考えられる。

授業後に次のようなアンケートを行った。内容はおおまかには、本授業の内容の理解度についてと、本授業の題材の良し悪しについてである。アンケートの内容と結果を示す。

次の各質問に対して、当てはまるものに○をつけてください。

(5 : とてもそう思う, 4 : ややそう思う, 3 : どちらでもない, 2 : あまりそう思わない, 1 : 全くそう思わない)

1. 数学での集合がどのようなものかわかった。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

2. 集合の表し方がわかった。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

3. 集合どうしの関係に着目することができた。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

4. いろいろな対応にある関係がわかった。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

5. 関数の定義（どのようなものが関数か）がわかった。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

6. 授業に楽しく取り組めた。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

7. 授業の内容は易しかった。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

8. 授業の題材が興味の持てるものであった。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

9. テキストがわかりやすかった。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

10. 全体的に内容がよく理解できた。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

11. 10で1か2に○をつけた人は、どの内容が良く分からなかったか、簡単にかいてください。

教育実験中の反応とアンケートの結果とを比べてみる。まずは、授業内容の理解度についてであるが、授業の前半部分（集合、関係）については理解できたようである。しかし、後半部分（いろいろな対応、関数の定義）についてはこちらが思っていたよりも生徒は理解していなかったようである。とくに、最も理解して欲しかった関数の定義については、あまり理解したとはいえないということであるので、直接その理由を聞いてみた。すると、関数の定義がわかったかという質問に対して、生徒は関数で今まで学習してきたグラフなどについてはまだ何も学習していないから、理解したとはいえないということであった。こちらとしては、一意対応が関数であることを理解していれば十分であったが、生徒は、やはりすでに関数を学習している分、グラフなどの内容も理解して初めて関数を理解したという考えがあるようである。生徒は定義の意味を少し間違えて捉えていることも伺えたので、この質問は一意対応が関数であるという決まりが分かったかということであると言いなおすと、やや分かったという意見に変わった。しかし、やはり関数が分かったという意識ではないようである。この点についてはどのように展開させていくか今後の課題である。

(2) 予備実験 2 回目

日時：1 回目と同様である。

場所：1 回目と同様である。

対象：1 回目と同様である。

本時の内容と展開および結果・考察

1. 「変量の抽出」について

教室や家など、身の回りから変化しているものを見つけた。挙げたものには、電池の充電、身長、部屋の中にいるノミの数、天気、出勤時間を上げた。ここで、「量」であるものは何か？と尋ねたところ、電気、身長、ノミの数と答えた。そこで、天気との違いはどこかとより詳しい説明を求めたところ、うまく説明はできないでいた。教師が天気などは質の変化だということを説明すると、すぐに納得していた。量に変化しているものを変量ということを確認した。

次に、変化していないものを挙げさせた。生徒は、家の位置、物置を最初に挙げた。家にある本など、人の手によって動かせるものは、変化するものと判断していたが、教師が、それ自らが変化しないものという問いかけに対して、本棚においてあるいろいろなものを挙げていた。量というものに着目せず、状態や位置の変化に着目しており、発問の仕方が重要と考える。量が変化しないものを一定量ということを確認した。

2. 「連続量と分離量」について

量の変化の仕方には、連続的な変化と分離的な変化があり、気温の変化とお金の枚数の変化を例に挙げ、その違いを考えた。生徒は、気温は一気に挙がらず徐々に上がるが、お金は一気に上がると表現していた。この生徒は前調査の段階で、連続量と分離量の問題を正答していた。よって、なんとなく理解しているが、説明はできないという段階と考えられる。教師が、お金に 1.1 枚などあるかと尋ねると生徒は理解していた。

3. 「ともなって変わる変量の抽出」について

1 で「質」ではなく「量」に注目させることが十分ではなく、またここでも「量」を挙げることを発問の段階で徹底していなかったため、生徒は最初は量を抽出できず、位置や状態の変化を挙げていた。量に着目することを説明しても、なかなか挙げられず、発問を「量というものにはどんなものがあるか」まで戻って考えさせた。それでも発問が抽象的すぎて挙げられず、身長はどんな量かと例に出すと、初めて生徒が高さなどの量を挙げる事ができた。その他も角度などの量を教師側が言って初めて現象から抽出できるという状態であった（このとき例に挙げた、「観覧車の高さ」と「観覧車の中心からでる棒と観覧車から鉛直に引いた線の角度」というともなって変わる量はとても奇抜な意見であった）。また、時間は最後まで生徒からはあがらなかった。

この変量を抽出するという活動は多くの生徒で意見を出し合うことが最も良いと実感し

た。対象の生徒が一人であったため、なかなか一つの考えに固執してしまって多くの意見が出てこなかったと感じた。教師の発問が大変重要であると実感した。

4. 「対応表」について

時間と観覧車の高さの関係に着目して、対応表にまとめることにした。このとき、実際に観覧車の模型を回し、ストップウォッチ、ものさしを使って測定を行った。3秒ずつの高さを測定し、対応表にまとめた。

テキストでは対応表が 10 個のデータしか書き込めなくなっていたので、スペースをもっと多く作成しておくべきであった。多くのデータが取れてこそ、観察の意味があると考ええる。

また、観察の道具をより正確な値を求められるようにそろえる必要がある。誤差を少しでも押さえるように観察器具を精巧なものにしなければいけないと考える。

5. 「関数関係の確認」について

対応表をもとに、前回学習した集合の図へ要素を抜き出し、関数関係になっているかどうかを確認した。その際、1対1の対応関係にある要素に加えて、偶然ではあるが2対1の対応関係になった要素が挙げられ、関数関係の確認ができた。多対1でも関数関係であることが確認できた。

6. 「用語の確認（自変数、従変数、定義域、値域）」について

用語を確認した。自変数と従変数の用語を示した際、従という字が「したがう」と読めることから、今の場合時間に伴って高さが増えていることが再び意識できたようである。定義域や値域という言葉も確認した。

教育実験中の反応とアンケートの結果とを比べてみる。

身のまわりのものから変量や伴って変わる変量を抽出する事に関しては、量と質の違いからなかなか量を上げることができなかったが、生徒はまずまずと感じているようである。

連続量と分離量については、この生徒は学習前からおおよそ理解していたため、よく分かったと感じているようである。

対応表にまとめることに関しての評価が低いが、この理由としては、観測器具が十分なものではなかったため、正確な値を求めることができなかったということが挙げられる。

定義域や値域については、まだ言葉だけの説明であるので、よく分からないという感想をもらしていた。

授業にはだいたい興味を持ち、楽しく活動や学習ができたようであるが、テキストについては分かりやすくはなかったようである。改善の必要があるということであろうか。

内容も簡単であると感じていることもあり、ここまでの内容は全体的に理解できているようである。

3節 本教育実験

1節で挙げたカリキュラムを検証するために教育実験を行った。本節では、事前認識調査、本教育実験、事後認識調査の順に結果を示す。

3-3-1. 事前調査について

教育実験前に行った調査について、以下に目的、方法、内容、結果および考察を述べる。

目的：

教育実験を受ける生徒の、関数に対する認識を把握するために行う。

方法：

対象生徒：京都教育大学附属桃山中学校 3年生7名

調査日時：2006年12月

課題、手続き：質問紙による一斉テストの形式で行う。調査時間は50分とする。

内容：第2章で行った予備調査と同様の問題や新しく作成した問題などを出題した。

調査の数学的内容を挙げると、次の14点である。

- ①連続的な変化
- ②関数の定義（関数のグラフを判断する）
- ③ x と y で表された式をもとに、変化量や変化の割合を求める
- ④座標を平面に表す
- ⑤一次関数の式をグラフに表す
- ⑥(a) 変化の割合（時間と距離）
- ⑥(b) 変化の割合（高さと横幅）
- ⑦定義域、値域を求める
- ⑧表を作成する
- ⑨式を求める
- ⑩現象をグラフに表す
- ⑪2変数を同時に変化させて考える
- ⑫座標を空間に表す
- ⑬2変数の式を求める
- ⑭2変数のグラフの形状

結果：生徒の調査結果を問題ごとに示すと次のようになる（数字は％）。なお、表および各グラフについている番号は、目的の項目に示した数学的内容の番号と一致する。

表 13：各問題の正答率

	①	②			③					
	記号	記号	理由		$y=3x-2$	$y=4$	$2x+y-4=0$	$y=3x-2$	$y=4$	$2x+y-4=0$
正答	14.3	42.9	14.3		57.1	71.4	28.6	71.4	71.4	71.4
準正答	0.0	0.0	0.0		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
誤答	85.7	57.1	85.7		42.9	28.6	71.4	28.6	28.6	28.6

	④	⑤	⑥(a)		⑥(b)		⑦		⑧
	(2,4)	$y=2x+1$	記号	理由	記号	理由	定義域	値域	表作成
正答	100.0	85.7	85.7	85.7	57.1	42.9	100.0	71.4	71.4
準正答	0.0	0.0	0.0	14.3	0.0	28.6	0.0	0.0	0.0
誤答	0.0	14.3	14.3	0.0	42.9	28.6	0.0	28.6	28.6

	⑨		⑩	⑪	⑫		⑬	⑭
	増加関数	減少関数	水槽に水	缶コーヒー	(4,3,2)	(-2,1,3)	$z=150x+30y$	グラフの形状
正答	85.7	71.4	28.6	57.1	28.6	28.6	100.0	0.0
準正答	0.0	0.0	28.6	0.0	28.6	28.6	0.0	0.0
誤答	14.3	28.6	42.9	42.9	42.9	42.9	0.0	100.0

図3 ①の結果

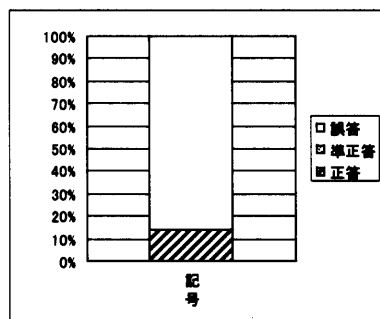


図4 ②の結果

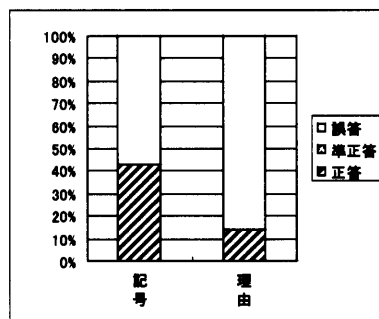


図5 ③の結果

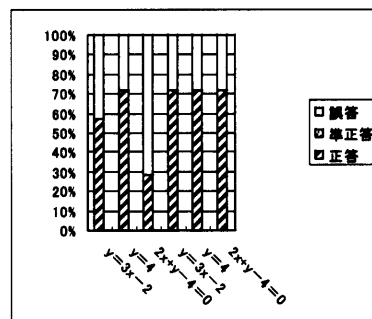


図6 ④⑤の結果

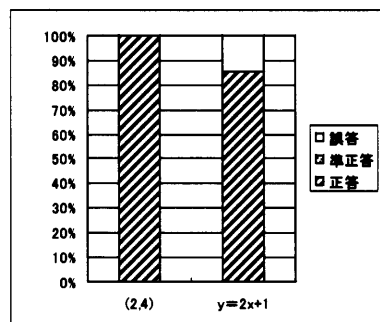


図7 ⑥(a)の結果

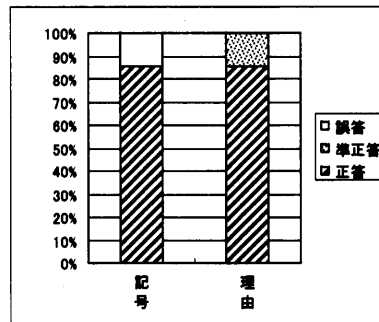


図8 ⑥(b)の結果

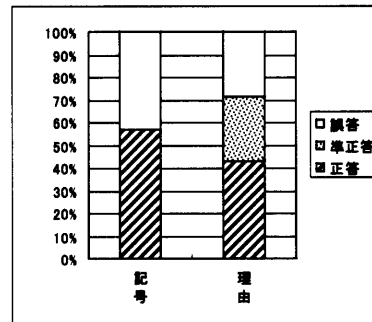


図9 ⑦⑧⑨の結果

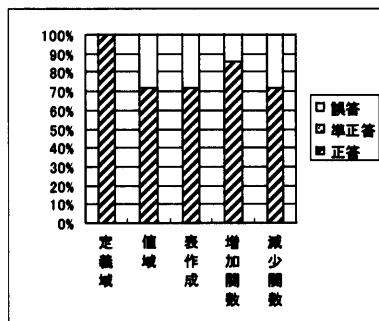


図10 ⑩の結果

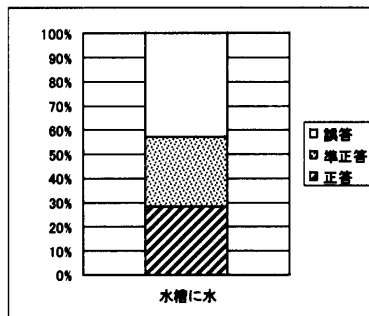


図11 ⑪の結果

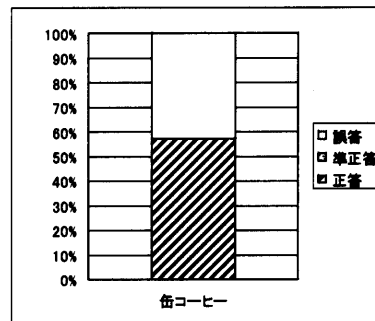


図12 ⑫の結果

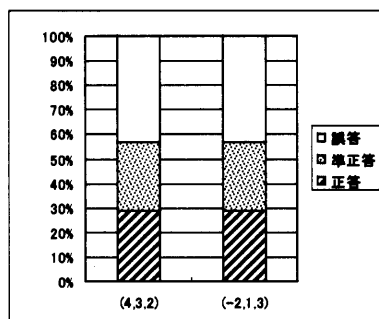


図13 ⑬の結果

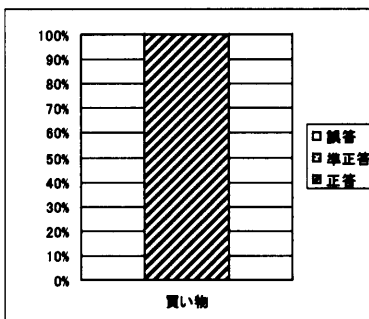
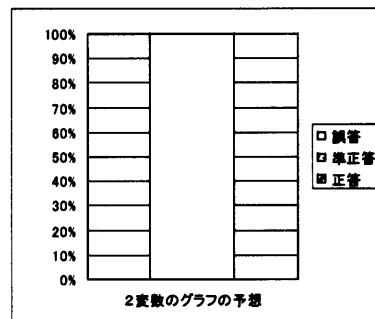


図14 ⑭の結果



考察：

調査結果から、④座標を平面に表す、⑤一次関数の式をグラフに表す、⑥(a)変化の割合(速さ)を求める、⑦定義域や値域を求める、⑧表を作成する、⑨式を求める、⑬2変数の式を求める、についてはおよそ70%以上の正答率であり理解していると判断できる。

しかし、①連続的な変化、②関数の定義、③式から変化量や変化の割合を求める、⑥(b)速さ以外の変化の割合を求める、⑩現実の事象をグラフに表す、⑪2変数を同時に変化させて考える、⑫座標空間、⑭2変数関数のグラフの形状、についての理解が十分でないといえる。

よって、これらの認識については、教育実験後にその実態を確かめることとする。特に、⑪、⑫、⑭の認識について、多変数関数の授業を通しての変化を考察することとする。

3-3-2. 教育実験について

対象生徒：京都教育大学附属桃山中学校 3年生7名（ただし，1日目の授業では欠席者が2名，2日目の授業では欠席者が1名いる）

実施日時：2006年12月

教育内容：前節の予備教育実験の内容に基づき，独自の教科書を使用する。授業は3日間行い，1日目は，関数の定義についての学習を行う。2日目は，現実の事象を観測し，値の変化を考察する学習を行う。3日目は，一次の多変数関数についての学習を行う。

以下に，それぞれの授業について，展開，結果，および考察を述べる。

(1) “関数の学習の準備”の教育実験について

授業展開

学習内容	生徒の活動（教師の発問）	指導上の留意点
数学における集合を理解する	集合という言葉について考える。（集合といたら何を思い浮かべますか？）	集合の要素が1個，0個のものを例に挙げながら，日常の集合との違いを強調する。
部分集合を理解する	図（世界地図）の中から，○の集合と名前をつけ，その集合の要素を挙げる。	
集合の要素を理解する	集合の要素を挙げる練習問題を行う。	
集合どうしの関係を理解する	集合どうしを関係づける練習問題を行う。	連続量の集合の要素を挙げるときに教師が例を示す。
	集合の図に，集合の名前とその要素を書き，関係を考える。	

集合の要素の対応関係を理解する	集合の要素どうしを矢印で結ぶ。	「～～から――への対応」という表現の仕方を押さえる。
1対1, 多対1, 1対多の関係があることを理解する		2以上のものを「多」と表現することを押さえる。
対応関係から関数の定義を理解する		
逆の対応, 多変数の対応にある関係を理解する。	逆の対応を矢印で結ぶ。 逆の対応が関数であるかどうか考える。 多変数の対応を矢印で結ぶ。 多変数の対応が関数であるかどうか考える。	多変数の場合, いくつかの条件から1つが決まっているという図になるように意識させる。

実際に使用したテキストは論文の巻末に掲載してある。

授業の実態について, 順を追って写真で示す。

写真1: 集合の問題に取り組む

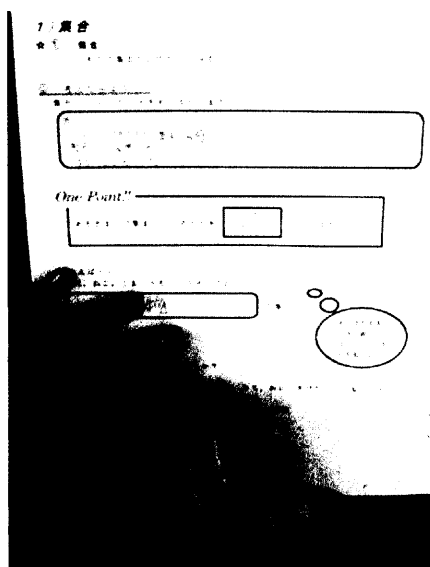


写真2: 部分集合の問題に取り組む



写真3:集合の関係を自ら挙げる

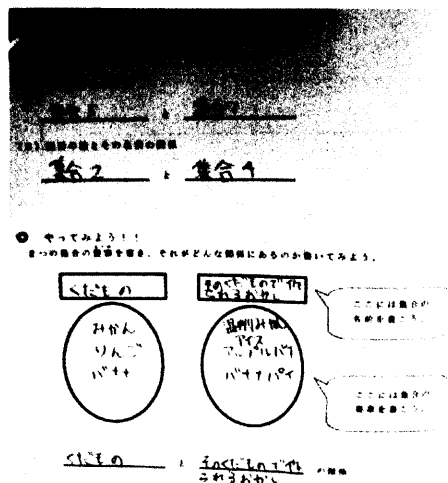


写真4:授業に取り組んでいる様子



写真5:関数の定義を学習

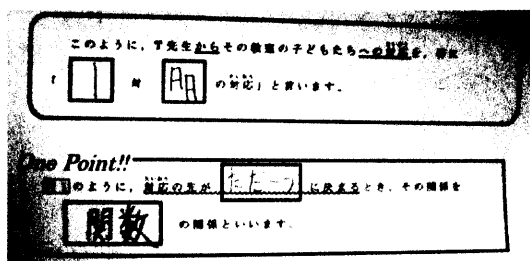


写真6:対応の練習問題に取り組む

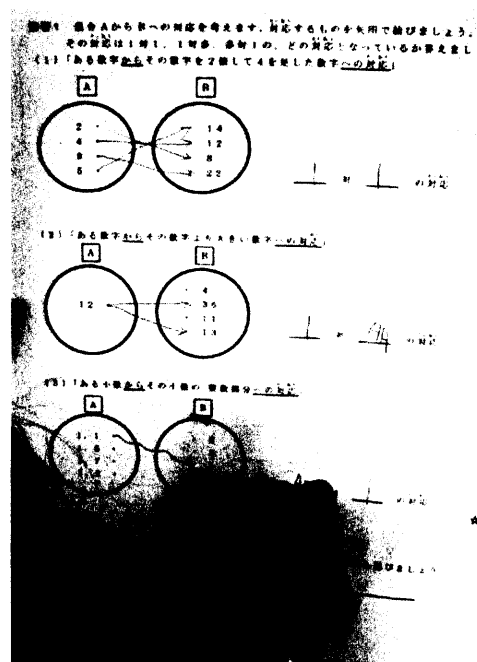
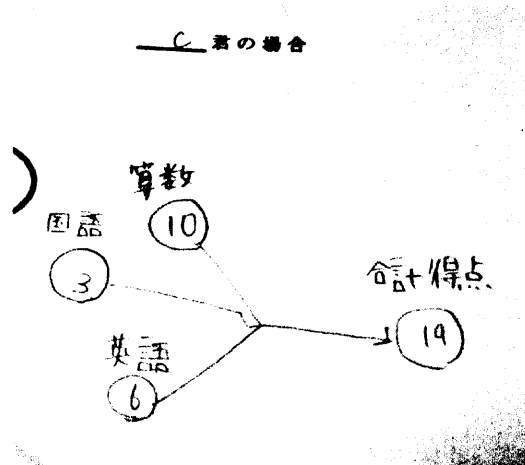


写真7:多変数の対応関係の練習



授業の結果と考察

授業中の生徒の様子から、日常で使っている集合という言葉と数学における集合という言葉が表すものの違いを学習する場面では、最初は戸惑うが例をいくつか挙げると納得した。集合の要素を挙げる場面では、連続的に変化する量の要素を挙げるのが難しく、離散的に変化する量の要素は簡単に挙げていた。

集合どうしの関係を挙げる場面では、生徒はそれぞれ独自に集合とその要素、集合どうしの関係を挙げていた。ここまでの学習で、集合どうしの関係について理解していたといえる。

集合どうしの要素間の対応を結び、その対応関係が何対何の対応であることを学習した。そのうち一意対応が関数であることを学習した。生徒は、学校の数学で学習した関数のイメージがある。そのために、集合間の対応での定義については現段階では理解しにくいようであった。

授業のあとに授業の内容についてのアンケートを行った（アンケートの内容は後掲する）。その中で、数学的な内容について生徒が理解したと感じている点は、「集合の表し方がわかった」というものであった。他の内容についてもおおむね理解したと感じていた。授業への興味・関心などについてのアンケートでは、「授業に楽しく取り組めた」と感じていた。しかし、「授業の内容が易しかった」、「題材は興味の持てるものであった」では、あまりそのように感じていないようであった。

(2) “関数の学習”の教育実験について

授業展開

学習内容	生徒の活動（教師の発問）	指導上の留意点
身の回りから変量を抽出する	（身の回りで動いているもの、変化しているものはないか）	
量的な変化と質的な変化を理解する	（気温の変化と、お金の枚数の変化の違いが分かるか）	
連続量と離散量の違いを理解する。		
現象を見て、変量、伴って変わる量を抽出する。	観覧車を見て、変量を抽出する。（観覧車を観察して、変化しているものはなんでしょう） 観覧車を見たり、自分の抽出した変量を見たりして、伴って変わる量を考える。（伴って変化しているものはなんでしょう）	実際に観覧車の動きを見せて考えさせる。 量に着目させる。
伴って変わる量について詳しく調べていきながら、その方法を学習する。	時間と高さの関係について調べる。 対応表を作成する。	
関数関係にあるか確認する。	集合の図に要素をかき、何対何の対応関係にあるかを確認する。	集合の図のかき方を説明する。

	増減の区間を調べて書く。	
	変化の割合の求め方を学習し、それぞれの区間で値を求める。	矢印の長さが値の大きさを表していることを強調する。
	対応表をもとに対応図に表す。	矢印の長さが値の大きさを表していることを強調する。
	対応図をもとに関数のグラフに表す。	
	変化の割合の値とそのときのグラフの形を見比べる。	高校生になったときに、式で表すことができるようになることを補足する。
関数の中には、式で表現できないものも存在することを学習する。	式で表現できないかを考える。 (時間と高さの関係はどのような式で表すことができるか)	

実際に使用したテキストは論文の巻末に掲載してある。

授業の実態について、順を追って写真で示す。

まずはじめに、身の回りから変化しているものを挙げた。その後、変化している量のうち、連続的な変化（すきまない変化）と離散的な変化（とびとびの変化）の違いを学習した。

観覧車をもとに変量の抽出を行い、それをもとに伴って変わる変量も抽出した。本時では、伴って変わる「時間」と「観覧車の乗り物（以下ゴンドラと表記）の高さ」の関係について観察した。生徒は3人の班になり、それぞれの班で観察を行った。観察した値を対応表にまとめた。このとき、前時で学習した、「〇〇から××への対応」という言い方を再確認した。

写真8: 班になり観覧車を観察する



写真9: メモリを読む



写真10: メモリを読む



写真11: 生徒の作成した表

対応表

で表わす値の対応関係を整理するときには「対応表を作る」という方法があります。それを行ってみましょう。

て表わす 時間 と 高さ の関係を対応表にまとめます。
(時間 から 高さ への対応)

の欄を上段に、対応の欄を下段に書きます。やってみましょう。

時間 (時)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
高さ (m)	0	1	2	3	4	5	6	7	8

対応表からいくつか値を抜き出し、集合の要素として挙げ、要素間の対応関係を確認させた。その対応関係より、時間からゴンドラの高さへの対応は関数の関係であることを確認した。対応表の値をもとに増加や減少している区間を抜き出すこと、それぞれの区間での変化の割合を求めることなどを学習した。このとき、変化の割合の値と観覧車の動きの関係も目で見て確認した。

視覚的に変化の様子を確認するために対応図を学習した。

写真12: 関数関係の確認

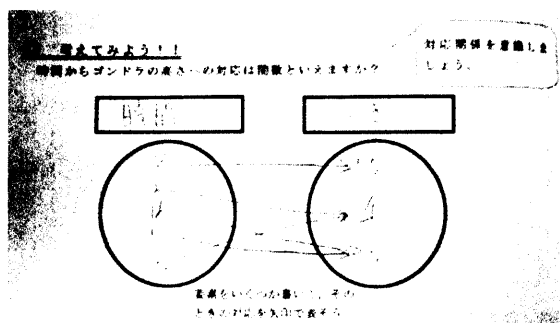
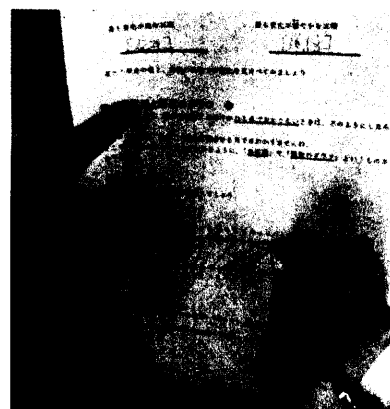


写真13: 対応表から対応図の作成



対応図のあと、それをもとに関数のグラフを作成した。観覧車の高さは矢印で表現し、すべて表したあと、矢印の先を折れ線で結び、関数のグラフを完成させた。また、関数のグラフをもとに変化の割合を求め、変化の割合の値と関数のグラフの関係を確認させた。

最後に、対応表や関数のグラフなどから、本時で扱った「時間からゴンドラの高さの対応」を式で表せないかを考えた。

写真 14 : 対応図から関数のグラフの作成

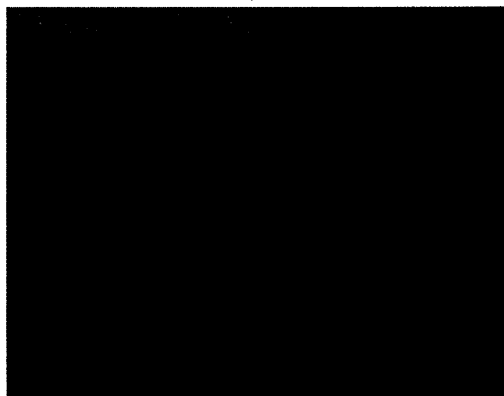


写真 15 : 対応図から関数のグラフの作成



写真 16 : 生徒の作成した関数のグラフ

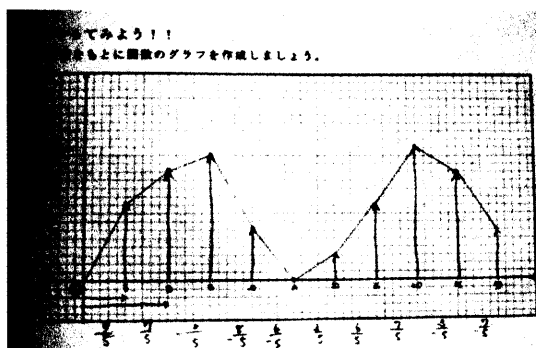
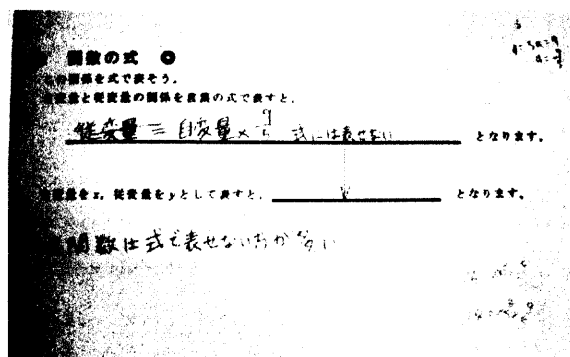


写真 17 : 式表示できるかを確認



授業の結果と考察

身の回りから変量を抽出することはすべての生徒ができていた。このとき、天気の変化などの質的な変化をあげる生徒はいなかったが、教師側で説明すると理解していた。

量について、連続的な変化と離散的な変化を、温度の変化とお金の枚数の変化を例にあげ教師が説明した。最初はなかなか生徒は理解しなかったが、温度は 0.1°C や 0.001°C ずつ変化することもあるが、お金の枚数は 0.1 枚や 0.001 枚ずつなど変化することはないこと、連続的な変化は「すきまのない変化」、離散的な変化は「とびとびの変化」という言葉を使うと理解していた。

観覧車を観察し、時間とゴンドラの高さの変化を対応表にまとめるときには、班員で協力して行っていたが、なかなかうまく値をとることができないため、何度もやり直していた。

対応表に書き込んだ値をもとに、時間とゴンドラの高さの集合とその要素の対応関係を考える際には、1対1、多対1の対応となっており、関数の関係にあるであることを確認すると、生徒は学校の授業で学習してきた関数と、集合で定義した関数とを少し結び付けることができたようであった。

対応図を書き、それをもとに関数のグラフを書いた。生徒は対応図は初めてのことで、関数のグラフは学校の授業で行っており、対応図をもとに関数のグラフを書くというよりは、対応表の値をもとにグラフをかいていた。生徒の会話の中にも、対応図と関数のグラフが結びついていないことが伺えた。ゴンドラの高さを矢印で表すことにより高さの値を強調することについては、生徒は大切だと感じていた。

関数のグラフをもとに変化の割合を求める際に、変化の割合の値が大きいほどグラフの傾きが大きいことを確認していた。

最後に、時間とゴンドラの高さの関係を式で表せないかと考えた。生徒はいろいろと式で表せないかと考えていたが、教師が「この関係は高等学校で学習するもので、現段階では式で表せないこと」、「関数の関係にあるものは式で表せないものも多数存在すること」を説明すると、生徒は関数の概念が変わったという表情を見せていた。また、実際の教科書を見せ、誤差の全くない実験結果とその結果からの式で表わしてある結果と、本時で行った観察の結果を比べ、教科書の値は理想化したもので、式に表すときには誤差を考えない必要があることを説明すると、この点についても納得した表情をしていた。

本時の授業について、授業後のアンケートを見ると、数学的な内容に関しては、定義域や値域について理解できた、関数の関係を式で表すことができた、という項目の点数は少なかった。これは、授業中で定義域や値域は重点的には扱わなかったこと、式表示ができない例であったことが要因として考えられる。

また、授業内容に関しては、授業が易しかった、授業の題材は興味の持てるものであった、全体的に内容がよく理解できた、の項目に対して点数が低かった。適度な難度はあったが、時間の関係で2授業時間(50分×2)で行ったこと、他の伴って変わる量について生徒それぞれが実験や観察を通して、対応表や関数のグラフの作成、増減や変化の割合を求める活動を十分に行えなかったことが要因として考えられる。

(3) “関数の学習の発展”の教育実験について

授業展開

学習内容	生徒の活動（教師の発問）	指導上の留意点
空間座標を理解する。	平面の位置の表し方を考える。 （平面の位置を正確に表すときはどうすればよいか） 空間の位置の表し方を考える。 （空間の位置を正確に表すときはどうすればよいか） 空間座標を表す練習問題を行う。	（たて、よこ）と（長さ、角度）の2通りの表し方があり、（長さ、角度）は高校で学習するかもしれないことを補足する。
2変数関数の調べ方を学習する。	（通話料金）＋（メールの料金）＝（携帯電話の料金）として、携帯電話の料金の変化を調べる。 $z = 30x + 5y$の式で表せる。	
関数関係にあるか確認する。	集合の図で関数関係を確認する。（この関係は関数の関係にあるといえるか）	
変数を固定して考えることを理解する。	メールの回数を決めて、通話時間の変化による携帯電話の料金の変化を対応表にまとめる。 通話時間を決めて、メールの回数の変化による携帯電話の料金の変化を対応表にまとめる。	変数 x, y が表しているもの（x：通話時間，y：メールの回数）をたびたび確認させる。

2変数関数のグラフを学習する。	携帯電話の料金を表すグラフを予想する。(どのようなグラフになると思うか。)	
2変数関数のグラフを作成する。	グラフを作成する。 ①それぞれの対応表をもとに、一次関数のグラフをボール紙にかく。 ②かいた一次関数のグラフを切り取る。 ③グラフの土台を作成する。 ④一次関数のグラフを土台に乗せる。	作成の時に、怪我に気をつけるように注意させる。 作成するものは大きすぎないように設定させる。
グラフを利用して2変数関数の値の変化を考える。	携帯電話の料金を減らすとき、通話時間とメールの回数をどのように変化させればよいか考える。 携帯電話の料金が同額になるような通話時間とメールの回数はグラフではどこに表れているか。	グラフの表すところは、山のような形全体ではなく、斜面の部分のみであることを強調する。

実際に使用したテキストは論文の巻末に掲載してある。

授業の実態について、順を追って写真で示す。

本時では、2変数関数の値の変化を考えることを目的とし、そのグラフを作成するという内容である。本時で扱う2変数のグラフは立体的なグラフとなるため、生徒はまず空間の座標の表し方を学習し、空間のものの位置は(たて、よこ、たかさ)の3つで決定されること、そしてそれぞれをx座標、y座標、z座標で表すことを理解した。

次に、携帯電話の料金(円)が電話時間(分)とメールの回数(回)で決まるとし、2変数関数の学習を行った。まず、集合の図を用いて関数の関係にあることを確認した。本時で扱った2変数関数は、携帯の料金を z (円)、電話時間を x (分)、メールの回数

を y (回) とすると、 $z = 30x + 5y$ の式で表されるものであった。

多変数関数を調べる上で大切な考え方である「変量の固定」を行いながら、電話時間やメールの回数の変化と、携帯の料金の変化の関係を対応表にまとめた。

写真 18 : 空間座標の練習問題に取り組む

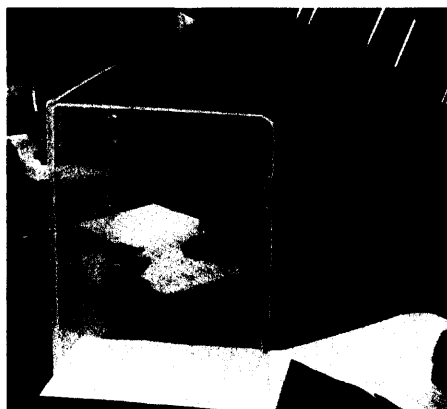


写真 19 : 対応表にまとめる



対応表を作成したのち、携帯料金のグラフがどのような形になるかを予想してからグラフの作成を行った。

ここで、2人～3人の班を作り、それぞれの班で一次関数のグラフを作成した。

作成した対応表をもとに、すべての一次関数のグラフを作成し終えた班から、携帯料金のグラフ（2変数関数の立体グラフ）を作成するため土台作りの活動に移った。

写真 20 : ボール紙に一次関数の
グラフを作成する

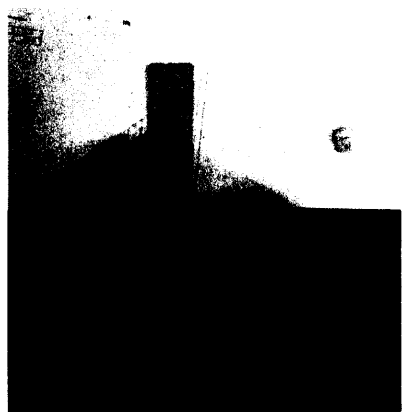


写真 21 : 協力して作成する



写真 22 : 対応表を確認しながら
一次関数のグラフを作成する

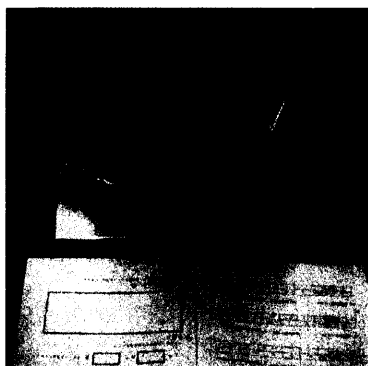


写真 23 : 土台の作成



土台が完成した班から、それぞれの一次関数のグラフを土台に立てていき、携帯料金のグラフを完成させた。

写真 24 : 2変数関数のグラフの作成



写真 25 : 2変数関数のグラフの作成



授業の結果と考察

空間の表し方が(たて, よこ, たかさ)で決まることは、平面の応用であるため簡単に気づいていたが、それを紙面上でどのように表したらよいのか、悩んでいる生徒もいた。空間座標を表した教具(写真 18)を利用するとおおむね理解し、練習問題も正答していた。

携帯料金が関数の関係にあるかどうかについては、すぐに理解していた。前の授業

でも多変数の対応関係にある関数を少し扱ったためと考えられる。

携帯料金が $z = 30x + 5y$ で表されるとし、その変化の様子を調べるために、変量の固定を行い対応表にまとめた。最初は、 x と y のどちらの変量を固定しているのかわからずに対応表を作成している生徒もいたが、 x が電話時間、 y がメールの回数であることを何回も確認しながら正確な対応表を作成していた。

対応表から一次関数のグラフを作成する作業、一次関数のグラフを組み合わせ立体グラフを作成する作業は、2人～3人の班で行った。この作業は時間が大変かかってしまうために班で行わせたが、作業効率、中学生の集中力の持続時間、作業と数学的内容の難易度などの条件を考慮すると、班で行って正解であったと考える。

グラフを作成の際、一次関数のグラフを立てて組み合わせればよいことはわかっていたが、なかなかどのように立てたらよいかわからない生徒もいた、しかし生徒の中から「通話とメールに対応しているところに立つんや!」という声もあり、自分で気づいて作成する様子も見られた。また、通話時間(x)とメールの回数(y)での料金(z)の変動の違いに着目している生徒もあり、変化率の違いを学習することもできるということがわかった。

グラフを作成した後、携帯の料金の値とそれを表しているグラフの位置の関係を確認した。この学習内容に関しては、すべての生徒が理解していた。

改善が必要な点としては、変量の固定を十分に抑えることである。対応表の作成の際には、一方の変量を固定して考えていたが、この時点で十分に定着しておらず、グラフを作成するときに自分の作った一次関数のグラフを x 軸、 y 軸のどの方向に立てるとよいかわからないという状態になってしまう場面が見られた。

また、携帯の料金を表すグラフはどのような形であるかを聞くと、「山みたい」、「スキー場みたい」と表現する生徒がおり、作ったものの全体がグラフであると考えていることが伺える。2変数関数の表すグラフが山の斜面に張られた曲面であることをもっと理解させるべきであった。

授業後のアンケートを見ると、2変数関数を式で表すこと、2変数の変化を対応表に表すことなどの技能的な内容は良いできたと感じているが、変量を固定して考える意味、2変数関数の値の変化の調べ方などの数学的な内容については理解が不十分であったと感じている。これらの内容が十分に身につくように重点を置いて授業を行うべきであった。

授業の内容については、適度に難しかったが楽しかったと感じており、2変数関数を中学校で扱うことは可能であると考ええる。

3-2-3. 事後調査について

目的：

事前調査で生徒の理解度が特に低かった内容について、教育実験を通すことによる理解度の変化を調べることを目的とする。

方法：

対象生徒：事前調査と同様である。

実施日時：事前調査と同様である。

課題、手続き：①質問紙による一斉テスト形式で行う。終わり次第②へ移行する。

②口頭試問（教師対生徒が1対1）を行う。

内容：調査問題は事前調査で特に正答率が低かったもののみを行った。調査問題は後掲する。調査問題の数学的な内容は次の点である（各項目の頭位に付いている番号は事前調査で付けた番号である）。

①連続的な変化

②(a) 関数の定義（グラフ）

②(b) 関数の定義（文章）

③式から変化量や変化の割合を求めること

⑥速さ以外の変化の割合を求めること

⑩現実の事象をグラフに表すこと

⑫座標空間

⑭2変数関数のグラフの形状、値の変化・・・（口頭試問）

結果：

上記の番号ごとの調査結果を示す（数字は％）。

表 14：各問題の正答率

	① 記号	②(a) 記号 理由		②(b) 記号 理由		③ $y=2x-2$ $y=10$ $x+y-6=0$		
正答	71.4	28.6	14.3	100.0	28.6	85.7	100.0	85.7
準正答	0.0	0.0	28.6	0.0	57.1	0.0	0.0	0.0
誤答	28.6	71.4	57.1	0.0	14.3	14.3	0.0	14.3

	③ $y=2x-2$ $y=10$ $x+y-6=0$			⑥ 記号 理由		⑩ 水槽に水	⑫ (1,3,5) (-2,1,-4)	
正答	85.7	85.7	85.7	14.3	71.4	57.1	100.0	85.7
準正答	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	14.3	0.0	0.0
誤答	14.3	14.3	14.3	85.7	28.6	28.6	0.0	14.3

図 15 ①の結果

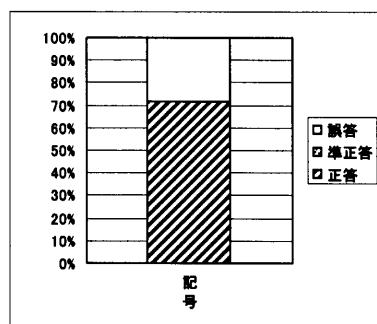


図 16 ②(a)の結果

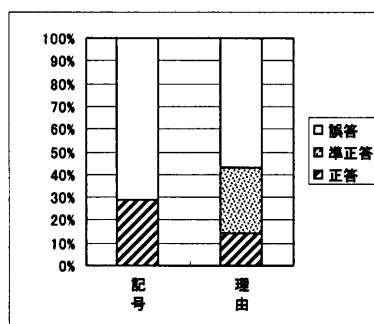


図 17 ②(b)の結果

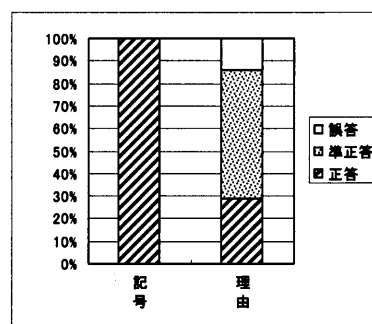


図 18 ③の結果

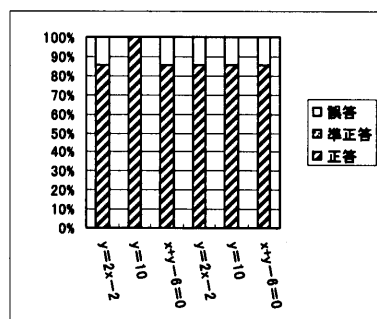


図 19 ⑥の結果

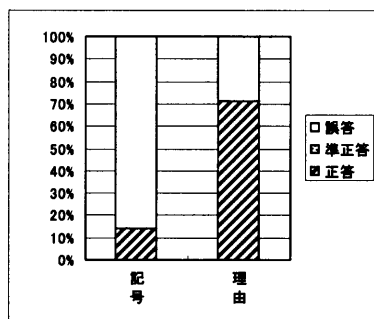


図 20 ⑩の結果

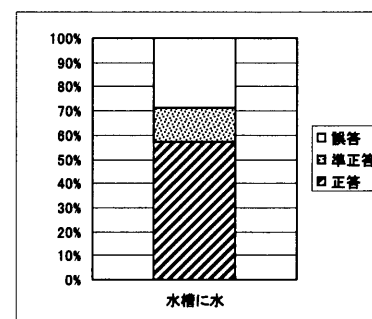


図 21 ⑫の結果

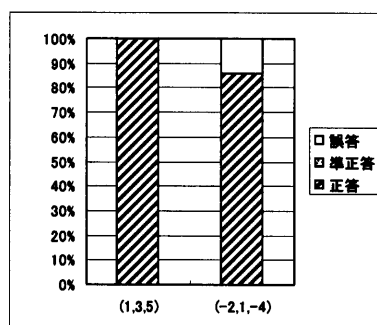
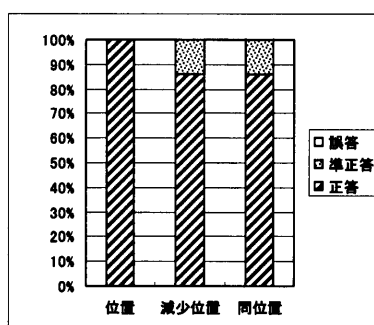


図 22 ⑭の結果



考察：

調査結果から、①連続的な変化、③式から変化量や変化の割合を求めること、⑫座標空間、⑭2変数の値の変化、については 70 %以上の正答率があり、理解していると判断できる。

しかし、②関数の定義をグラフから判断する問題、及び関数の関係にある理由を答える問題、⑥変化の割合を求める問題、⑩現象をグラフで判断する問題は、正答率が低く十分に理解しているとはいえない。

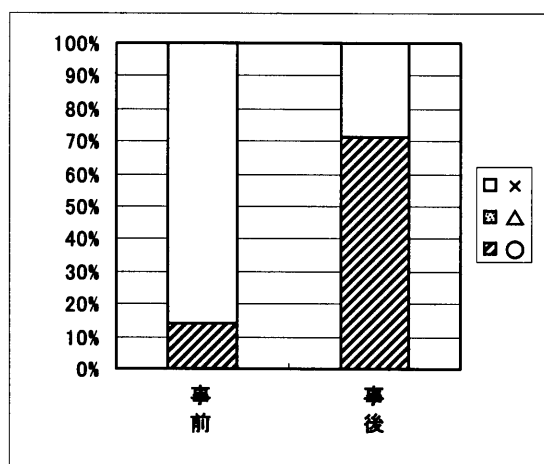
3-2-4. 本実験のまとめ

事前調査で正答率が低かった内容の問題について、事後調査の結果と比較し、教育実験の内容を考察する。

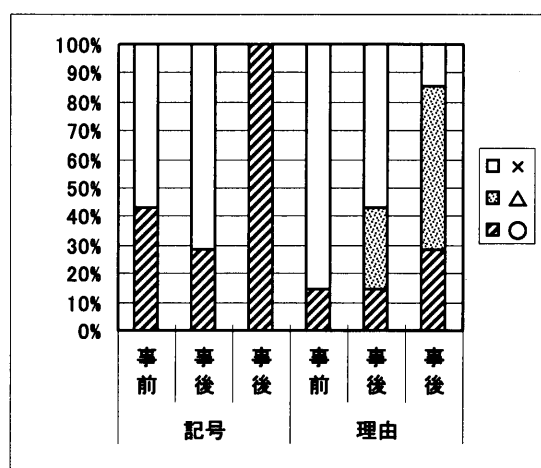
調査結果の比較

2つの調査結果は次の通りである。

①連続的な変化

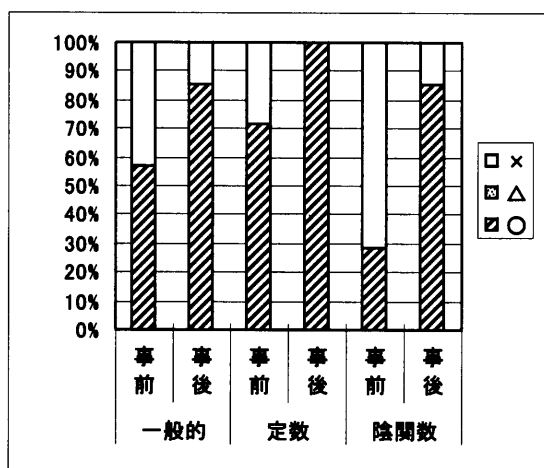


②関数の定義

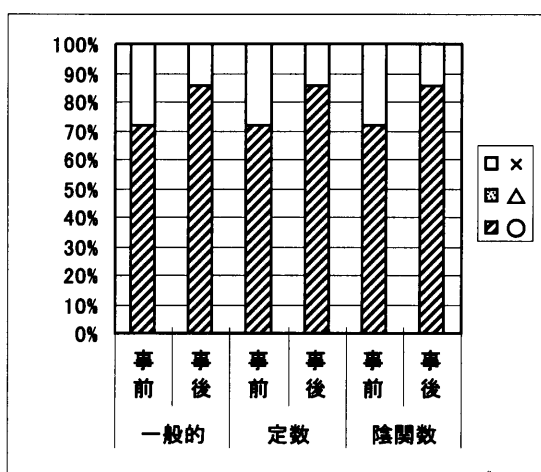


③式から変化量や変化の割合を求めること

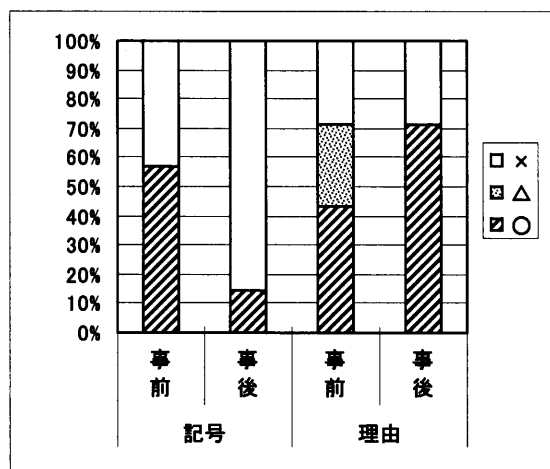
変化量



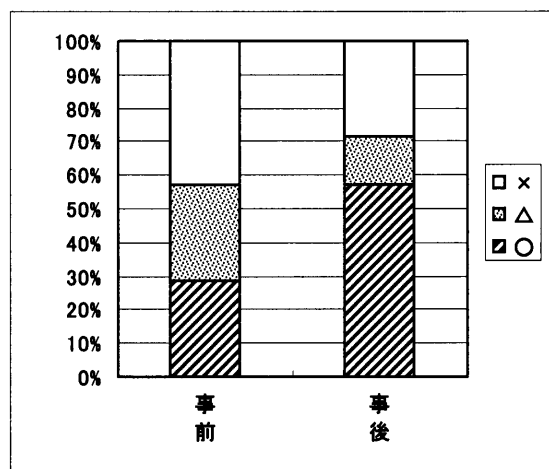
変化の割合



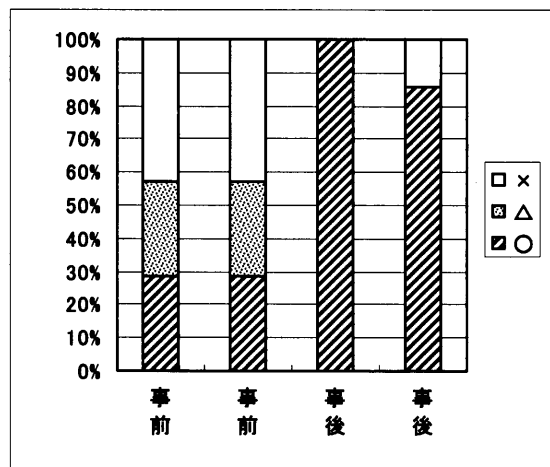
⑥速さ以外の変化の割合を求めること



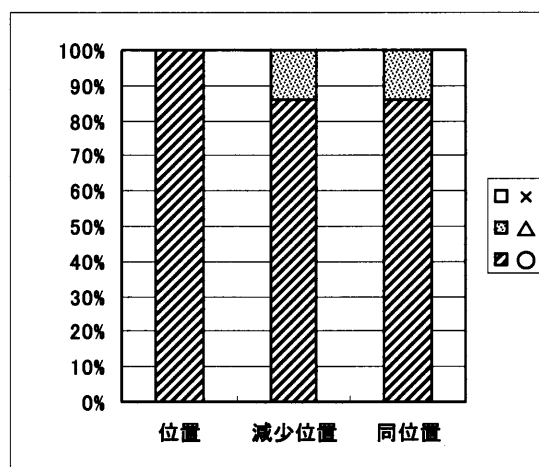
⑩現実の事象をグラフに表すこと



⑫座標空間



⑭2変数関数のグラフの形状



考察

事前と事後の調査結果を比較すると、①、③、⑩、⑫では、すべて事後に生徒の正答率が上がっている。①や⑫は、授業の中でも扱った内容であり、教育の効果があったと考えられる。特に⑫に関しては、現在の中学数学では学習しない内容であるが、正答率から見ても十分に学習可能な内容であると考えられる。

③、⑩は授業で直接扱うことはなかったが、正答率が上がっている。この理由として、実際の現象を観察し、値の増加・減少・一定を調べる経験をしたことが考えられる。

②、⑥は事後においてもそれほど正答率の上昇はなかった。中には、記号を選択する問題でいくつか正答率が減少しているものもある。②は、実際の伴って変わる量の関係が関数であるかの判断を重視して行い、グラフでの関数関係の判断を全く行わなかったことが要因として考えられる。⑥は、変化の割合の求め方を重視して教育し、その値の表す意味

や実際の現象との関係などは簡単に扱うにとどまってしまったことが要因として考えられる。

しかし、②、⑥に関しては記号や値を求める問題の正答率は下がったりしているものもあるが、理由を答える問題では正答率がすべて上昇している。これらのことより、考え方はおおむねわかっているが、実際に正確な値を求めることができない段階の理解であると考えられる。授業で時間を使い、丁寧に扱って理解を深めておく必要があったと考える。

以上のことより、教育後も関数の定義、変化の割合については正答率が低く、十分に理解していないと考える。これらの内容については、今後改善していく必要がある。

4節 まとめ-カリキュラムの検証-

本研究では、本来の関数の学習が必要である、現実の事象を考察する能力の育成を目指し、多変数関数を中心としたカリキュラムを提案した。そのカリキュラムの一部である“一次の多変数関数”までの部分の検証のため、中学校3年生に対して教育実験を行った。

教育実験の結果、初めて学習する空間座標や一次の多変数関数については、中学校3年生の段階で十分に学習可能であることが示唆された。特に、多変数関数については、グラフを作成すること、2変数関数の値をグラフで表すこと、グラフから値の変化を読み取ることが可能であることがわかった。

さらには、多変数関数を扱うことで変化の割合についての再考察もでき、1変数関数での学習の定着をはかることができる可能性も示唆された。これらより、提案したカリキュラムの系統性が妥当であったといえよう。

一次の多変数関数以降について、山本(2006)では、高校1年ではあるが、2次の多変数関数の教育の妥当性が示されている。このことをふまえると、提案したカリキュラムは系統性が成り立ち妥当であると考えられよう。

結 論

研究成果

今後の課題

研究成果

本研究の目的は、①現在の関数教育における問題点を見出し、②その打開のために多変数関数を中心とした中等教育段階とりわけ中学校段階における新たなカリキュラムを開発・提案し、③提案したカリキュラムの一部について教育実験による検証を行うこと、であった。

これらの目的を達成するため先行研究および学力調査を分析した結果、以下のことがわかった。

日本の関数教育は、従来よりグラフや式中心の教育内容であり、これらは現在に至るまで続いているという現状にあることが、関数教育の歴史を考察することにより明らかとなった。しかし、関数教育で本来大切である「現実の事象の変化を考察する能力」が十分に身につけていないという問題点が明らかとなった。さらに、式やグラフなどに関する基本的な内容も身につけていないという問題点も明らかとなった。

そして、これらの問題点を打開するべく、本研究では、多変数関数を中心とした新しいカリキュラムを提案し、その中の“一次の多変数関数”までの部分について、中学3年生を対象とした教育実験による検証を行った。

教育実験の結果、提案したカリキュラムについて、次のことが示された。

多変数関数意外の内容に関しては、関数の定義を初期の段階で扱うことで、生徒は式表示できない関数や多変数関数などを関数の中のひとつと判断し学習でき、初期段階に関数の定義を扱うことは有用であると考ええる。

多変数関数の内容に関しては、“一次の多変数関数”は中学3年生で教育可能である。さらには、多変数関数を扱うことで変化の割合についての再考察もでき、1変数関数での学習の定着をはかることができる可能性も示唆された。これらより、提案したカリキュラムの系統性が妥当であったといえよう。

一次の多変数関数以降について、山本(2006)では、高校1年ではあるが、2次の多変数関数の教育の妥当性が示されている。このことをふまえると、提案したカリキュラムは系統性が成り立ち妥当であると考えられよう。

今後の課題

今後の課題として、山本(2006)では二次の多変数関数の教育の妥当性が示されているため、その内容をふまえ、中学校で実践し検証することが挙げられる。

また、より多くの生徒を対象に教育実践を行い、提案したカリキュラムにおける学年が見合っているか、また一般性があるかについて検証を行うことも課題として挙げられる。

謝辞

本研究を行うにあたり、渡邊伸樹先生には、度重なるご指導をいただきまして、感謝の気持ちでいっぱいです。渡邊先生には、修士論文の指導だけでなく、人間として生きていくうえで大切なことを教えていただきました。3年間という時間はあっという間に過ぎてしまった気がします。修士1回生の時は、山本先生、河崎先生、種村先生という偉大な先生方とともに学問に励むことができ、大変充実した1年間を過ごすことができました。本当に幸せものであることを実感しております。

守屋誠司先生には、4回生のころから現職の先生方と交流する機会を与えていただいたり、修士1回生のときはドイツでの研修にも参加させていただいたりし、人生において貴重な経験を得ることができました。また、先生のゼミ生でなくても、あたたかいご指導ご鞭撻を幾度となくいただきまして、本当にありがとうございました。

引用・参考文献

開猛雄・渡邊伸樹 (2005), 『中等教育における関数の指導の試み (その1)』, 第 63 回数学の文化史研究会発表論文集, pp. 1-4

開猛雄・渡邊伸樹 (2005), 『中等教育段階における関数の教育について (その1) ～関数の導入の指導について～』, 数学教育学会夏季研究会発表論文集, pp.

開猛雄・渡邊伸樹 (2005), 『中等教育段階における関数の教育について (その2) ～日本とドイツの比較からみた関数の導入の指導について～』, 数学教育学会秋季例会発表論文集, pp. 74-76

保坂秀正・山崎昇訳 (1997), 『グレイゼルの数学史 I』, 大竹出版, pp. 115-119

<http://www5b.biglobe.ne.jp/~elmopapa/kyoikukiso5.htm>, 学習指導要領の変遷

http://www.mext.go.jp/b_menu/shuppan/sonota/990301.htm, 新学習指導要領

<http://www.osaka-c.ed.jp/hensenpdf/webcur/wc04suug/wc0408.pdf>, 学習指導要領の (関数の扱われ方の変遷)

香村寛蔵, 『関数関係の指導』, 1960, 金子書房, pp. 41-60

松宮哲夫, 『小倉金之助と現代』, 1987, 教育研究社, pp.11-53

文部省検定済教科書 (1951), 「数学 中学校 1 年 上」

文部省検定済教科書 (1951), 「数学 中学校 1 年 下」

文部省検定済教科書 (1951), 「数学 中学校 2 年 上」

文部省検定済教科書 (1951), 「数学 中学校 3 年 上」

文部省検定済教科書 (1964), 「中学数学 1」, 大阪書籍, pp. 78-106

文部省検定済教科書 (1964), 「中学数学 2」, 大阪書籍, pp. 85-132

文部省検定済教科書 (1964), 「中学数学 3」, 大阪書籍, pp. 79-112

文部省検定済教科書 (1972), 「中学数学 1」, 大阪書籍, pp. 123-142

文部省検定済教科書 (1972), 「中学数学 2」, 大阪書籍, pp. 93-124

文部省検定済教科書 (1972), 「中学数学 3」, 大阪書籍, pp. 81-108

文部省検定済教科書 (1981), 「中学数学 1」, 大阪書籍, pp. 104-127

文部省検定済教科書 (1981), 「中学数学 2」, 大阪書籍, pp. 82-111

文部省検定済教科書 (1981), 「中学数学 3」, 大阪書籍, pp. 76-103

岡森博和 (1981), 「関数への試み」, 横地清, 『数学科教育学序説 下』, ぎょうせい, pp.259-316

小倉金之助・鍋島信太郎, 『現代数学教育史』, 1954, 大日本図書, pp.84-109, 174-180, 185-206, 297-326, 363-414

北京師範大学ほか, 『中日近現代数学教育史 第三巻』, 1999, ハンカイ出版, pp.81-87

佐々木力 (2005), 『数学史入門』, ちくま学芸文庫, pp. 145-187

横地清・菊池乙夫 (1962), 『小・中学校における関数の現代化』, 明治図書, pp.9-35, 56-73, 153-215

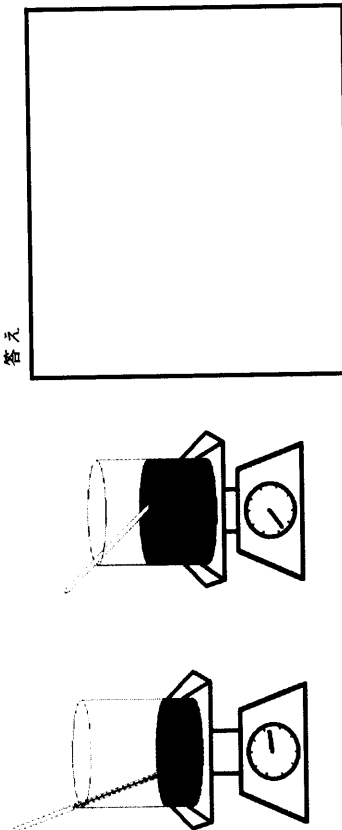
山本育央 (2006), 『中等教育における関数指導の一考察(その6)～多変数関数の試み～』, 第66回数学の文化史研究会発表論文集, pp. 11-14,

調査問題

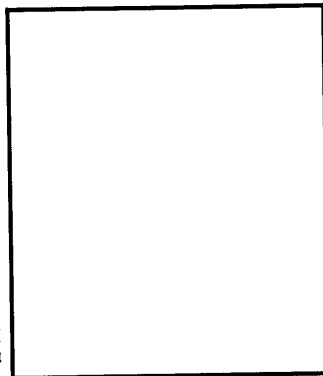
組 番 名前

- 1 次の2つの絵を見て、その違いを答えてください。(たくさん見つけて書きましょう。)
- (1) ビーカーに液体をいれ、温度計をさし、計りにのせています。

A B

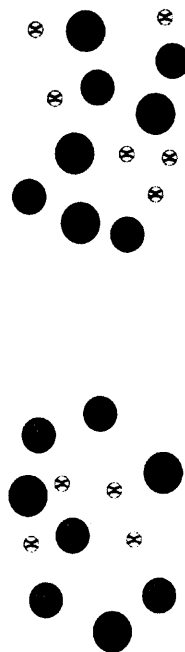


答え

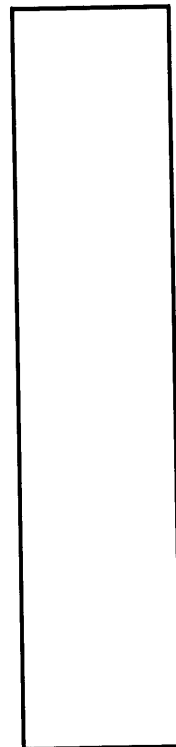


- (2) 広場にボールが転がっています。

A B



答え



- 2 個数に限りがあるもの、限りが無いものの番号をそれぞれ選んでください。

- ① 日本の都道府県の数
② 20cmの細い“ひも”のできる四角形の面積
③ つめの伸びる長さ
④ 偶数

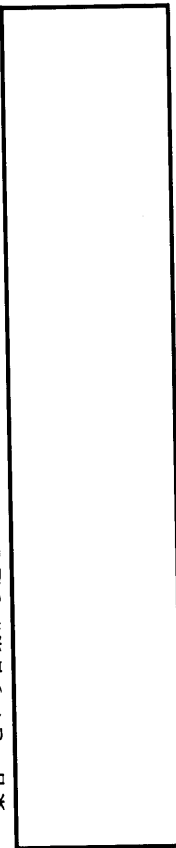
限りがある

限りがない

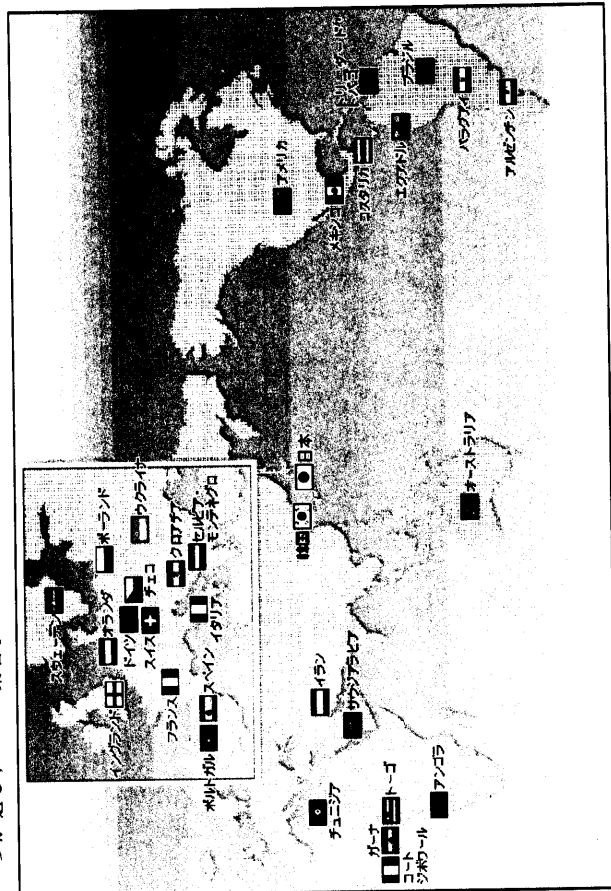
- 3 連続的に(すきまなく)変化しているものに○をつけてください。

- () 10円玉を1枚ずつ置いていくときの枚数
() 水の温度が6℃から25℃まであがるときの温度のあがり方
() 階段を2段ずつのぼるときの段数
() ストップウォッチで10秒はかるときの秒数
() ホーミングの本数
() 歩行者用の信号機の色

- 4 “集合”という言葉から連想するもの(こと)を書いてください。



5 次のものは 2006 年の W カップに出場した国名とその場所です。この中から国をいくつか選び、「～の集合」のように名前をつけてください。



例： 日本より東側の参加国 の集合

国名 { アメリカ, メキシコ, コスタリカ, エクアドル, トリニダード・トバゴ, ブラジル, パラグアイ, アルゼンチン }

の集合

6 次の集合の要素（集合に入るもの）を書いてください。（たくさんある場合は5個程度）

- (1) 奇数の集合
- (2) 10 cm の線香を燃やしたときの残りの長さの集合
- (3) 輪投げを5回行って、入った回数の集合

7 次の表の上段と下段はどのような関係にあるでしょうか。

(1) スポーツ

野球	バスケット	バレー	柔道	サッカー
9	5	6	1	11

の関係

(2) 秒速 10 m の自転車

1	2	4	7	10
10	20	40	70	100

の関係

(3) 10 cm のなすびを切る

1	3	5	6	8
9	7	5	4	2

の関係

調査問題

____年 ____組 ____番 名前 ____

- 1 “関数”という言葉から連想されるものを下の例のように書いてください。
(たくさん書きましょう)



調査問題

____年 ____組 ____番 名前 ____

- 1 比例、及び1次関数の具体例を1つずつ挙げてください。(文章、絵、数式など何を使っても良いです。)

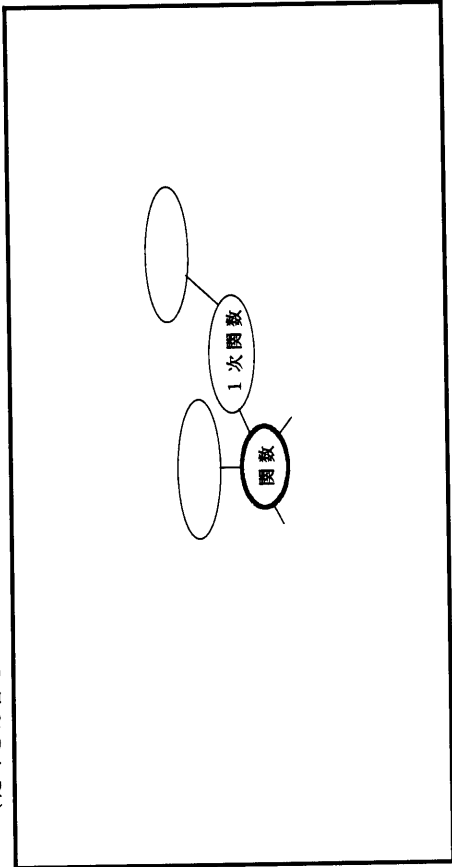
比例

1次関数

調査問題

年 組 番 名前

- 1 “関数”という言葉から連想されるものを下の例のように書いてください。
(たくさん書いてください)



- 2 電車の運賃と乗車距離で、対応するものをすべて線で結んでください。
(次の電車の運賃表を見て答えてください)

運賃 (円)	乗車距離 (km)	運賃 (円)	乗車距離 (km)
150	1 ~ 3	340	23 ~ 28
200	4 ~ 7	360	29 ~ 34
260	8 ~ 12	380	35 ~ 40
300	13 ~ 17	390	41 ~ 46
320	18 ~ 22	400	47 ~ 52

200 (円)	•
380	•
300	•

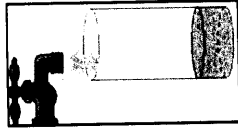
• 36 (km)
• 37
• 5
• 15
• 6
• 35
• 17

調査問題

年 組 番 名前

- 3 文章を読み、a, b を選び、また、選んだ理由も簡単に書いてください。

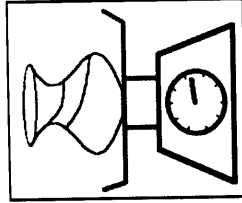
- (1) 円筒形の容器に水をためていきます。入れはじめから時間をはかり、水の高さと時間の関係を考えることにしました。時間から水の高さへの対応は (水の高さは時間の) 関数といえますか。



a 関数といえる b 関数とはいえない

理由: _____

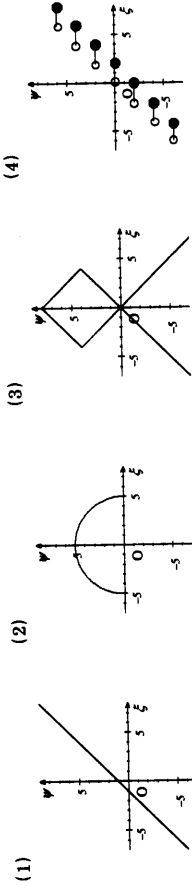
- (2) 右のような形のつぼに砂を入れて重さをはかります。砂の量からつぼ全体の重さへの対応は (つぼ全体の重さは砂の量の) 関数といえますか。



a 関数といえる b 関数とはいえない

理由: _____

- 4 x から y への対応を考え、その対応のグラフが次のようになる時、関数のグラフといえるのはどのグラフでしょうか。すべて選び、番号を○で囲んでください。



調査問題

____年 ____組 ____番 名前 _____

- 4 比例、及び1次関数の具体例を1つずつ挙げてください。(文章、絵、数式など何を使っても良いです。)

1次関数

- 5 体の部分とその個数で、対応するものすべてを線で結んでください。

頭
耳
口
腕
足の指
首
かかと

・ 1
・ 10
・ 2

- 6 カーペットの値段が、「縦の長さ(m)×横の長さ(m)×1000」(円)で決まるとします。このとき、縦と横の長さの組と、そのときのカーペットの値段を線で結んでください。

(縦 , 横)

(4 , 3)
(10 , 7)
(2 , 3)
(6 , 5)

絨毯の値段

・ 6000 (円)
・ 12000
・ 30000
・ 70000

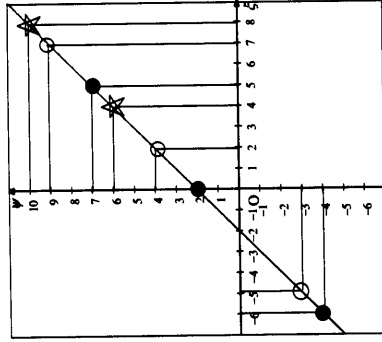
調査問題

____年 ____組 ____番 名前 _____

- 7 次の文章は関数のきまりです。() を埋めてください。

() 変わる2つの () xy があって、 x の値を決めると、それに () する y の値が () 決まるとき、() の関数であるという

- 8 右の図は、1次関数 $y=x+2$ のグラフ上に、○、●、◎、☆の記号が付いているものです。この図を見て、次の各問に答えてください。



- (1) 次の () に当てはまる記号や座標を答えなさい。

ア. (4 , 6) → ()

イ. (☆) → (,)
→ (,)

- (2) (1) のア、イの対応関係について、関数の関係にあるものを次の①～④から選び、番号を○で囲んでください。また、選んだ理由を簡単に書いてください。

① ア ② イ ③ ア、イの両方 ④ どちらでもない

理由 :

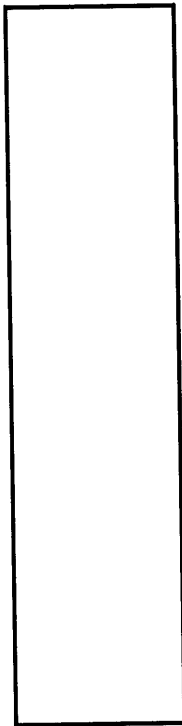
調査問題

年 組 番 名前

- 1 図表に最も関わるのがあるものを○で囲んでください。(3つ以内)
 グラフ、式、表、傾き・切片、方程式、対応、変化、増加・減少、座標、xやy
 伴って変わる量、文字、直線、曲線、点、値、変域、図形、代入、数、比例

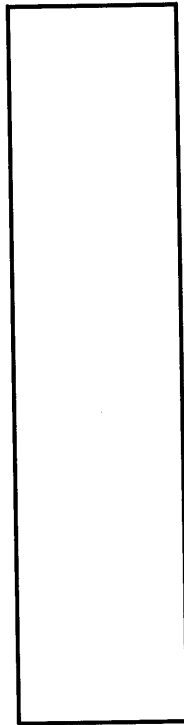
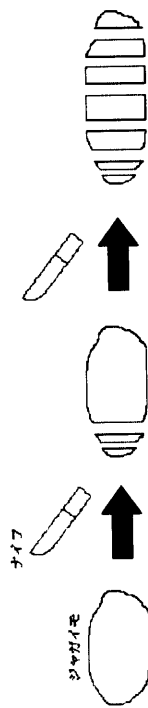
- 2 次のそれぞれの図表で、変化しているものは何でしょうか。
 (たくさん見つけましょう)

(1) ししおどし*



* 竹に水を溜めていくと、ししおどしが傾きます。竹の中の水がこぼれ、なくなると再び
 もとの位置に戻ります。この動きが繰り返されます。

- (2) ジャガイモをナイフで切る

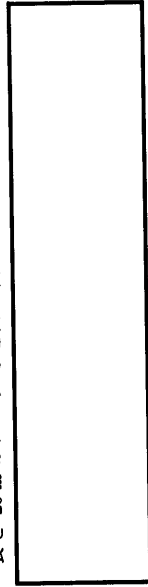


調査問題

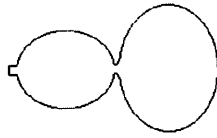
年 組 番 名前

- 3 次のそれぞれの図表で、伴って変化しているものは何でしょうか。たくさん見つけ
 ましょう。
 「○○が変化すると××が変化する」などのように答えてください。

- (1) 長さ 20 m のロープで地面を開き、陣地を作る。



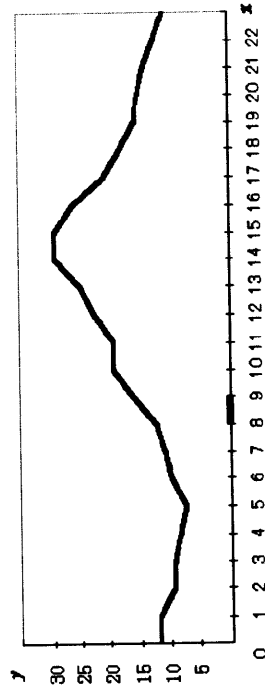
- (2) 図のような“ひょうたん”



ひょうたん



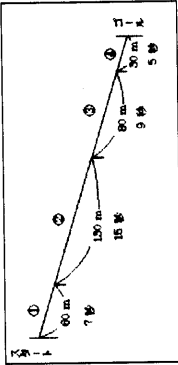
- 4 次のグラフにおいて、xの値が8から18までの間で、yの値が増加している範囲に
 は赤色を、減少している範囲には青色を、一定である範囲には黒色を塗ってください。



調査問題

年 組 番 名前

- [5] スイム君はウォーターライダーに乗ることにしました。スタート地点に全長 300 m のコース図がありました。



問 1 最も流れの速い区間は①～④の何番でしょう。

答え：

問 2 問 1 でどのように考えたか、簡単に書いてください。

答え

- [6] 100 サイズ（縦＋横＋高さが 100cm 以下）の荷物を考えます（図では縦が A、横が B、高さが C となっています）。このとき、次の問いに答えてください。

問 荷物の体積が最大となるような縦、横、高さの長さを決めたいと思います。どのようにして長さを決めたいでしょうか。

長さを決める方法を具体的に書いてください。（ただし、縦＋横＋高さは 100cm 以下です。）

サイズの回り方
②＋③＋④＝荷物の大きさ



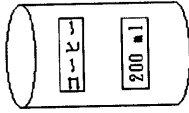
調査問題

年 組 番 名前

- [7] 200 ml 入りのコーヒーの缶があります。次の問いに答えてください。

(1) 缶の中に入るコーヒーの量をほんの少しだけ増やしたいとき、コーヒー缶の高さと半径をどのように変化させたら良いでしょうか。考えられる手段を 5 つ書いてください。

注) 缶の高さを 1 cm 増やす, 2 cm 増やす, 3 倍に増やすなどはすべて「缶の高さを増やす」として, 1 つと考えます。



- ①
②
③
④
⑤

- (2) 缶の高さと半径のどちらか一方を少しずつ増やしていく場合は、どちらのほうか体積の変化が大きいですか。①～④の記号を選び、選んだ理由を簡単に書いてください。

- ① 高さを増やしていく ② 半径を増やしていく
③ 同じ ④ どちらともいえない

記号： 理由：

- [8] 次のそれぞれの関数において、x の値が -3 から 2 まで変化するときの y の値の変化量, 変化の割合をそれぞれ求めてください。

(1) $y=3x-2$ (2) $y=4$ (3) $2x+y-4=0$

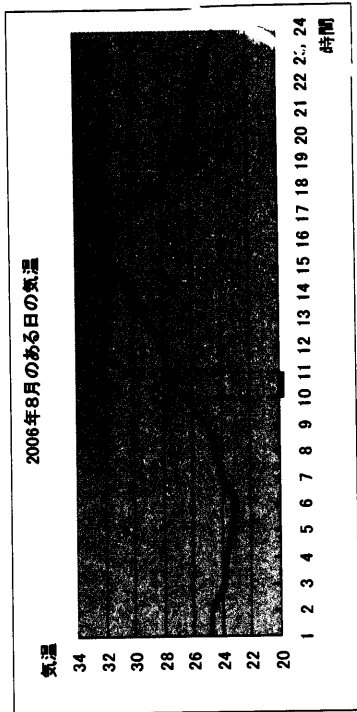
y の変化量 変化の割合 y の変化量 y の変化量

変化の割合 変化の割合 変化の割合

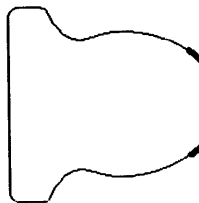
調査問題

年 組 番 名前

- 9 次の図はある日の京都の気温を表しています。朝の10時から夜の20時までの気温の変化のうち、気温が増加している時間帯には赤色を、減少している時間帯には黒色を、一定である時間帯には黒色を塗ってください。



- 10 次のような“つぼ”があります。この図を見て答えてください



「下から上へ」



「上から下へ」

- (1) 左側の“つぼ”には「下から上へ」と見ていき、横幅が増加しているところは赤色を、減少しているところは青色を、一定のところは黒色を塗ってください。
- (2) 右側の“つぼ”には「上から下へ」と見ていき、横幅が増加しているところは赤色を、減少しているところは青色を、一定のところは黒色を塗ってください。

調査問題

年 組 番 名前

- 11 次のそれぞれの関数において、 x の値が-3から2まで変化するときの y の値の変化量、及び変化の割合を求めてください。

(1) $y=3x-2$

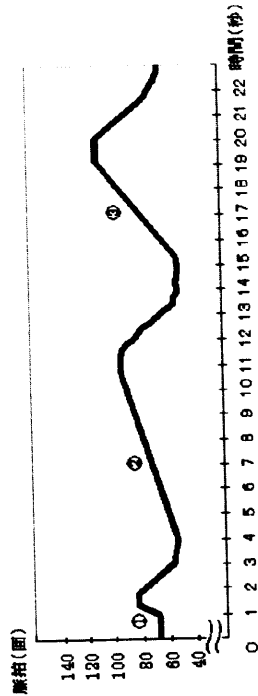
(2) $y=4$

(3) $2x+y-4=0$

y の変化量 _____ y の変化量 _____ y の変化量 _____

変化の割合 _____ 変化の割合 _____ 変化の割合 _____

- 12 あきら君は健康診断で脈をはかりました。下のグラフはそのときの結果です。このグラフを見て、各問いに答えてください。



- (1) グラフの①～③で、最も脈拍が増加しているところはどこでしょうか。番号を選んでください。

番号: _____

- (2) グラフの①～③で、最も急速に脈拍が増加しているところはどこでしょうか。番号を選んでください。

番号: _____

調査問題

年 組 番 名前

- 13 車のスピードが時間によってどのように変化しているかをメーターを見ながら調べ、表にまとめました。次の表を見ながら、各問いに答えてください。

時間 (秒)	0	5	12	15	22	30	32	44	58	68	75	80
スピード (km/h)	0	28	40	60	53	53	35	42	50	30	9	0

① () ② () ③ () ④ () ⑤ () ⑥ ()

- (1) スピードが増加しているところには「ぞ」、減少しているところには「げ」、一定であるところには「い」と表の () に書き入れてください。
- (2) 表から、時間の範囲、車のスピードの範囲をそれぞれ書いてください。
(○○以上△△以下のように書いてください。)

時間の範囲: _____

スピードの範囲: _____

- (3) スピードが最も増加しているところ、最も減少しているところは、①～⑥のどこでしょう。また、そのときの増加量、減少量はそれぞれいくらでしょう。

番号: _____ , 増加量: _____ 番号: _____ , 減少量: _____

- (4) スピードが最も急激に増加しているところは①～⑥のうちどこでしょう。番号を選び、どのように考えて選んだか、考え方を簡単に書いてください。

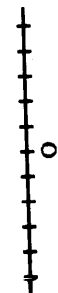
番号: _____ , 考え方: _____

調査問題

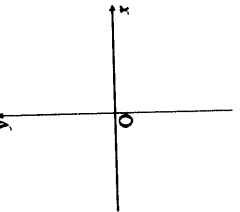
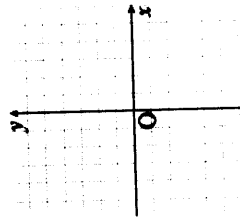
年 組 番 名前

- 1 関数の授業で学習したことは何ですか。思いつくことを書いてください。(単語でも良いです。)

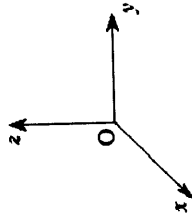
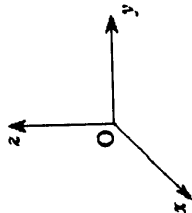
- 2 次の数を、下の数直線に表してください。
- (1) 3 (2) -4



- 3 次の座標を、下の座標平面に表してください。
- (1) (2, 4) (2) (-2, 1)



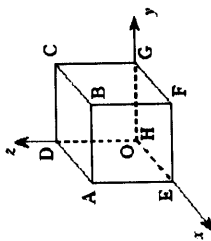
- 4 次の座標を、下の座標空間に表してください。
- (1) (4, 1, 2) (2) (1, 3, 5)



調査問題

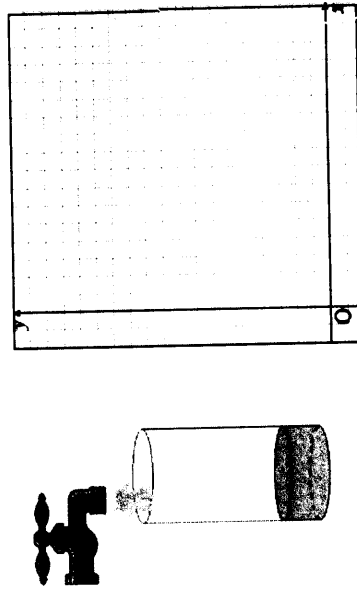
組 番 名前

- 5 図は1辺が1の立方体です。A, B, F, Gの点の座標を求めなさい。
ただし, Oは原点であり, OとHは同じ点です。



A (, ,)
B (, ,)
F (, ,)
G (, ,)

- 6 高さが15cmある円筒形の容器に, 毎秒2cmずつたまる速さでためていき, 9秒間水をいれました。
時間の経過と水の高さの関係をグラフに表してください。



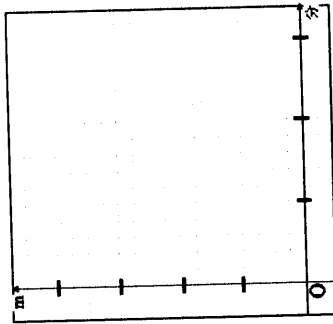
- 7 1本150円の飲み物をx本, 1個100円のおにぎりをy個, 1個30円のお菓子をz個買いました。
このときの合計金額をA円とし, Aをx, y, zを使って式で表しなさい。

式: _____

調査問題

組 番 名前

- 8 次の表をもとに, グラフを作成してください。
S君は家から学校までの800mの道のりを往復することにした。S君が家を出発してから家との距離を表にまとめた。



時間(分)	0	1	2	3	4
家との距離(m)	0	200	400	600	800

5	6	7	8	9	10
800	800	800	800	700	500

11	12	13	14	15	16
500	300	200	100	50	0

- 9 1分間に2cmずつ燃えていく12cmの線香があります。この線香に火をつけ, 1分間ごとに線香の長さをはかり, 10分間観察しました。
- (1) 燃え尽きるまで何分かかるでしょうか。 _____ 分
- (2) 線香の長さが最も長いとき, 最も短いときはそれぞれ何cmでしょうか。
最も長いとき _____ cm 最も短いとき _____ cm
- (3) この関係を表にまとめてください。
- | 時間(分) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|--------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 線香の残りの長さ(cm) | | | | | | | | | | | |
- (4) 時間をx(分), 燃えた線香の長さをy(cm)として, この関係を式に表してください。
- 式: _____

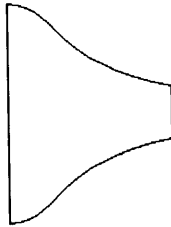
- (5) 時間をx(分), 残っている線香の長さをy(cm)として, この関係を式に表してください。
- 式: _____

調査問題

組 番 名前

10

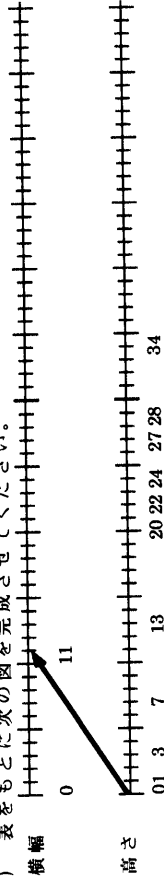
図のような形をした花びんがあります。
やすよさんは「花びんの高さで横幅の関係」について
表を作成しました。
この表をもとに各問に答えてください。



やすよさんの作成した表

高さ (cm)	0	1	3	7	13	20	22	24	27	28	34
横幅 (cm)	11	11	12	15	19	27	30	35	40	42	46

(1) 表をもとに次の図を完成させてください。



(2) 高さが 7 cm から 13 cm まで増加したとき、

横幅は何 cm 増加していますか。 _____ cm

(3) 横幅が最も増加している場所、横幅が最も急激に増加している場所それぞれ何 cm から何 cm のところですか。(高さの範囲を書いてください。)

横幅が最も増加している場所 _____ cm から _____ cm までの場所

横幅が最も急激に増加している場所 _____ cm から _____ cm までの場所

11

あきら君は「かたつむり」を観察しました。「かたつむり」は 1 分後にちょうど最初の位置から 10 m のところにいました。

あきら君はこの「かたつむり」の速さを分速 10 m と予想し、その動きは

$$y = 10x \dots \textcircled{1}$$

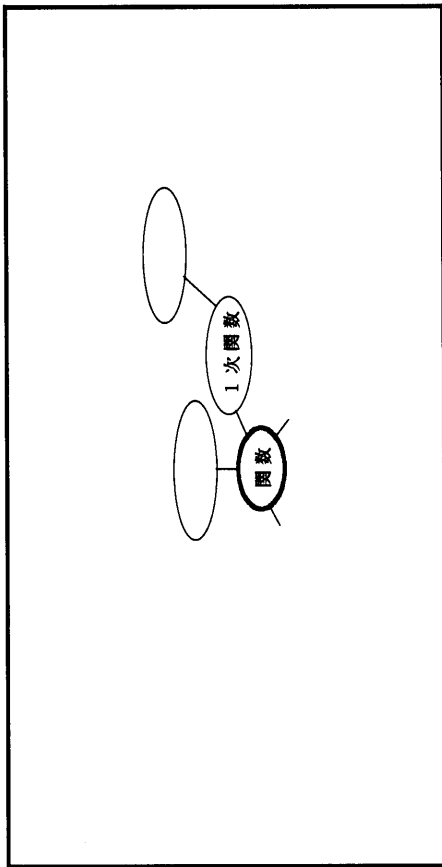
このとき、式①の文字 x , y はそれぞれ何を表しているでしょうか。

x : _____ y : _____

調査問題

____年 ____組 ____番 名前 _____

- 0 “関数”という言葉から連想されるものを下の例のように書いてください。
(たくさん書きましょう)

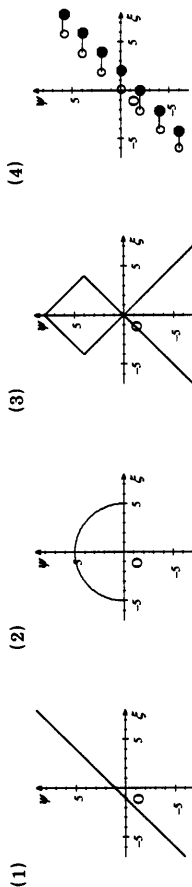


- 1 (1) 連続的に(すきまなく)変化しているものに○をつけてください。

- () 10円玉を1枚ずつ置いていくときの枚数の増え方
- () 水の温度が6℃から25℃まであがるときの温度のあがり方
- () 階段を2段ずつのぼるときの段数の増え方
- () ストップウォッチで10秒はかるときの秒数の増え方
- () ホームランの本数の増え方
- () 歩行者用の信号機の色の変わり方

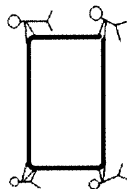
- (2) (1)でどのように考えたか、簡単に書いてください。

- 2 xからyへの対応を考え、その対応のグラフが次のようになる時、関数のグラフといえるのはどのグラフでしょうか。すべて選び、番号を○で囲んでください。
また、どのように考えたか簡単に書いてください。



- 3 次のそれぞれの場合で、併って変化しているもの(数量)は何でしょうか。たくさん見つけよう。
「○○が変化すると××が変化する」などのように答えてください。

- (1) ロープで地面に陣地を作る。



- (2) 図のような“ひょうたん”



ひょうたん

4 次のそれぞれの関数において、 x の値が-3から2まで変化するときの y の値の変化量、及び変化の割合を求めてください。

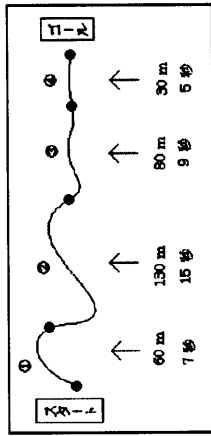
- (1) $y=3x-2$ y の変化量 _____ y の変化率 _____
- (2) $y=4$ y の変化量 _____ y の変化率 _____
- (3) $2x+y-4=0$ y の変化量 _____ y の変化率 _____

5 次の各問に答えてください。

(1) (2, 4)を下の座標平面に書いてください。 (2) $y=2x+1$ のグラフをかくてください。



6 スイム君はウォータースライダーに乗ることにしました。スタート地点に全長300mのコース図がありました。コース図は上から見た図で、各ポイント(●)間の長さとかかる時間が書いてあります。



コース図

- (1) 最も流れの速い区間は①～④の何番でしょうか。
- (2) (1)でどのように考えたか、簡単に書いてください。

7 やすさんはある花びんの「高さ」と「横幅の関係」について表を作成しました。この表をもとに各問に答えてください。

やすさんの作成した表

高さ (cm)	0	3	12	20	24	27	34
横幅 (cm)	11	12	19	28	32	40	46

(1) 横幅が最も急激に増加している(増加の割合が大きい)場所を

①～④から選んでください。 答え: _____

(2) (1)でどのように考えたか、簡単に書いてください。

8 1分間に2cmずつ燃えていく12cmの線香があります。この線香に火をつけ、1分間ごとに線香の長さをはかり、10分間観察しました。

- (1) 燃え尽きるまで何分かかるでしょうか。 _____ 分
- (2) 線香の長さが最も長いとき、最も短いときはそれぞれ何cmでしょうか。

最も長いとき _____ cm 最も短いとき _____ cm

(3) この関係を表にまとめてください。

時間(分)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
線香の残りの長さ(cm)											

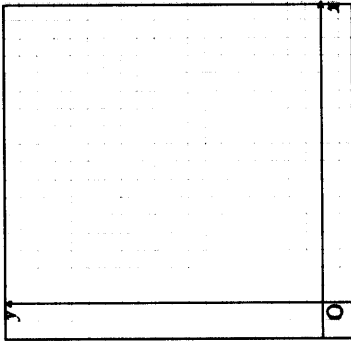
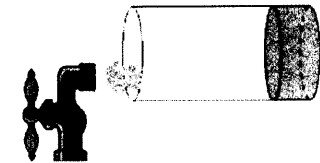
(4) 時間を x (分)、燃えた線香の長さを y (cm)として、この関係を式に表してください。

式: _____

(5) 時間を x (分)、残っている線香の長さを y (cm)として、この関係を式に表してください。

式: _____

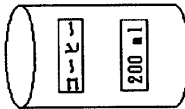
- 9 高さが 15cm ある円筒形の容器に、毎秒 2 cm ずつたまる速さでためていき、9 秒間水をいれました。
時間の経過を x 、水の高さを y とし、その関係をグラフに表してください。



- 10 200 ml 入りのコーヒーの缶があります。次の問いに答えてください。

缶の中に入るコーヒーの量をほんの少しだけ増やしたいとき、コーヒー缶の高さと半径をどのようにに変化させたら良いでしょうか。考えられる手段を 5 つ書いてください。

注) 缶の高さを 1 cm 高くする、2 cm 高くする、3 倍に高くするなどはすべて「缶の高さを高くする」として、1 つと考えます。



①

②

③

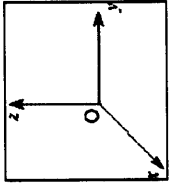
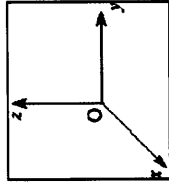
④

⑤

- 11 次の座標を、下の座標空間に表してください。

(1) (4, 3, 2)

(2) (-2, 1, 3)



- 12 1 本 150 円の飲み物を x 本、1 個 100 円のおにぎりを y 個買いました。
(1) このときの合計金額を Z 円とし、 Z を x, y を使って式で表してください。

式：

- (2) この関係をグラフで表すと、どのようなグラフになると思いますか。図や言葉などを使ってかいてください。

関数の学習の準備

関数ってそもそも何だろう??

____年 ____組 ____番 名前 ____

今から関数の学習をしていきましょう。関数の学習にはものの集まりに注目することが大切です。ですからまず、ものの集まりを考えてみましょう。

1) 集合

☆① 集合

ものの集まりに注目してみましょう。

◎ 考えてみよう!!

・集合・といったら何を思い浮かべますか?

One Point!!

あるきまりで集まっているものを

といいます。

たとえば・・・

①犬, ねこ, うま, さる, うさぎ, にわとり, ライオン②

の集合

あつまりを表すとき、数学では「 $\{ \}$ 」という記号を使います。

◎ 考えてみよう!!

これらはどのような集合でしょうか?

(1) ①おじいさん, おばあさん, 犬, さる, きじ, おに, きびだんご, 冤がしま

の集合

(2) ①長方形, 正方形, 台形, 平行四辺形, ひし形②

の集合

(3) 12, 4, 8, 10, 12, 14, 20

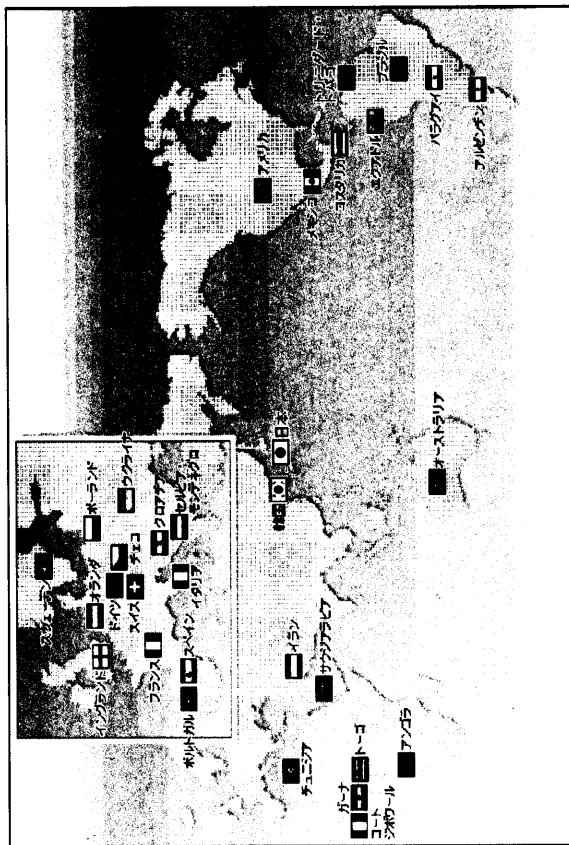
の集合

{ } の中にある
もの一つ一つを、
その集合の要素(よ
うそ)といいます。

注) 要素が1個でも、0個でも数学では集合といいます。

☆② 部分的な集合

次の図は何かに関係のある国を集めたものです。さて、どのような国の集まりでしょうか???



この中から国をいくつか選び、「～の集合」のように名前をつけてみよう。

例: 日本より東側の参加国 の集合

国名 { アメリカ, メキシコ, コスタリカ, エクアドル, トリニダード・トバゴ, ブラジル, パラグアイ, アルゼンチン }

(1)

の集合

国名

{

(2)

の集合

国名

{

☆③ 要素(ようそ)

次の集合の要素を書きましょう。

(1) 60 mm のシャーペンの芯を使っていくときの残りの長さの集合

{

}

(2) 奇数の集合

{

}

(3) 水が沸騰するまでの温度の集合

{

}

◎ やってみよう!!

(1) 教室のみんなの身長集合を作ってみよう。

(2) 身長が 130 cm より高い人の集合を作ってみよう。

(3) 身長が 160 cm より高い人の集合を作ってみよう。

<確認しよう> 新出単語, 新出記号
集合 { } 要素

2) 関係

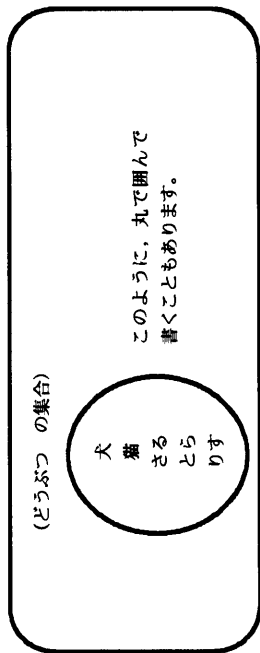
集合を表すとき、| | という記号を使って、

| 犬, 猫, さる, とら, りす | (動物の集合)

と書きました。

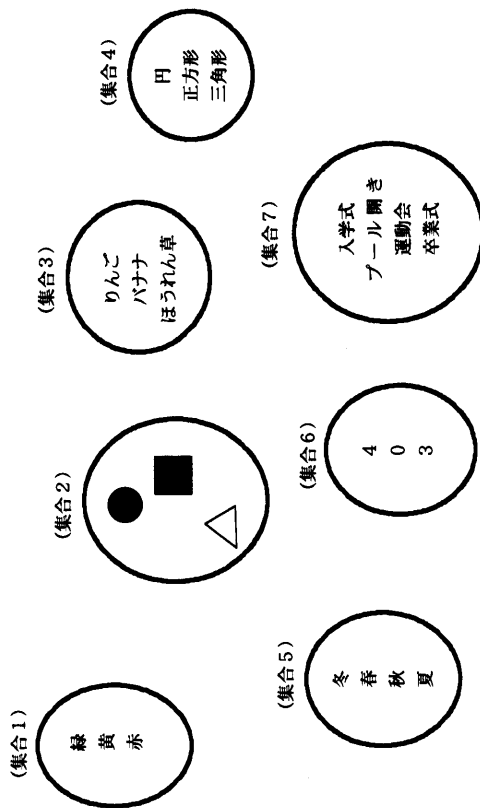
そして、{ } の中の一つ一つをその集合の要素といたしました。

集合を表現する方法は他にもあります。



☆① 集合とその関係

次の関係にある集合を下の7つの中から見つけ、ペアとなる集合の番号を書きましょう。



(1) 食べ物とその色の関係

_____ と _____

(2) 季節と行事の関係

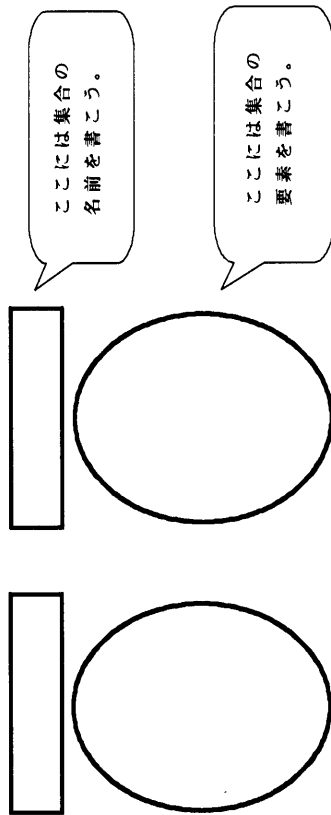
_____ と _____

(3) 図形の絵とその名前の関係

_____ と _____

◎ やってみよう!!

2つの集合の要素を書き、それがどんな関係にあるのか書いてみよう。



_____ と _____ の関係

<確認しよう> 新出単語, 新出記号

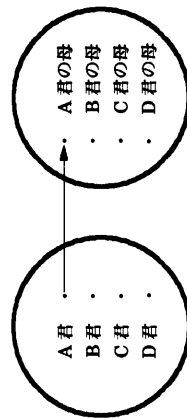
○ (集合の図) 集合の関係

3) 対応

集合どうしの関係について、もう少し詳しく見ていこう。

集合どうしの対応している要素を矢印で結んでみましょう。

(子どもとお母さんの関係)



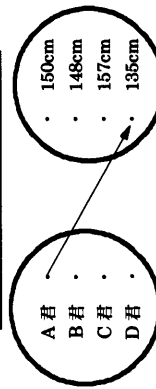
このように、関係しているものを矢印で結ぶことにより、対応しているものどうしをより強調することができます。

☆① 対応

例 あるクラスの子どもとその身長の関係は、A君が135cm、B君が150cm、C君が157cm、D君が148cmでした。

図のように、B君、C君、D君と身長に対応を表してみよう。

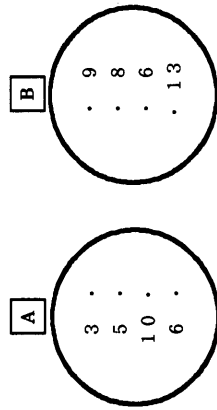
クラスの子どもと身長に対応



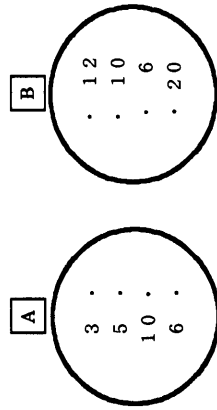
このように、A君が135cm、B君が150cmであることを表すときに、矢印を利用することにより対応関係をより強調することができます。
そして、これをもとに、「A君から135cmへの対応」と言います。

練習 集合AからBへの対応を考えます。

(1) 「ある数字からその数字に3を足した数字への対応」を矢印で結びましょう。

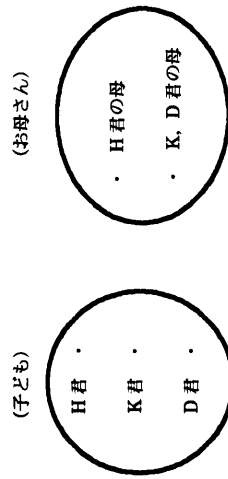


(2) 「ある数字からその数字を2倍した数字への対応」を矢印で結びましょう。



☆② いろいろな対応と関数

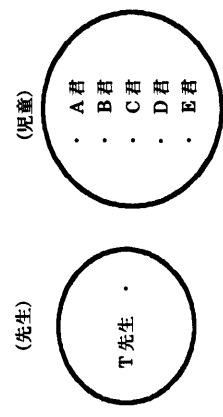
例1 H君、K君、D君とH君のお母さん、K君、D君のお母さんがいます。K君とD君は兄弟です。子どもからお母さんへの対応を矢印で結んでみましょう。



このように、H君からH君の母への対応を、特に「 対 の 対応」と言います。

また、K君、D君からK、D君の母への対応を、特に「 対 の 対応」と言います。

例2 4-1組のクラスの担任はT先生で、そのクラスの子どもはA君、B君、C君、D君、E君がいます。先生から子どもへの対応を矢印で結んでみましょう。



このように、T先生からその教室の子どもたちへの対応を、特に「 対 の対応」と言います。

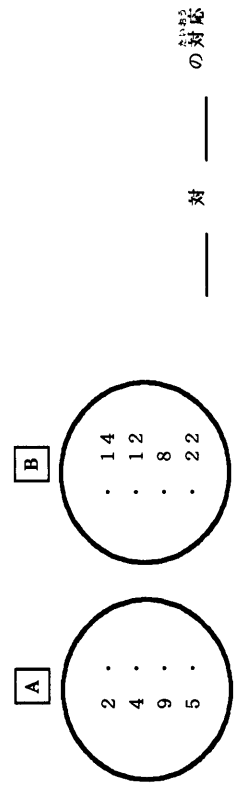
One Point!!

例1のように、対応の先がに決まる時、その関係をの関係といいます。

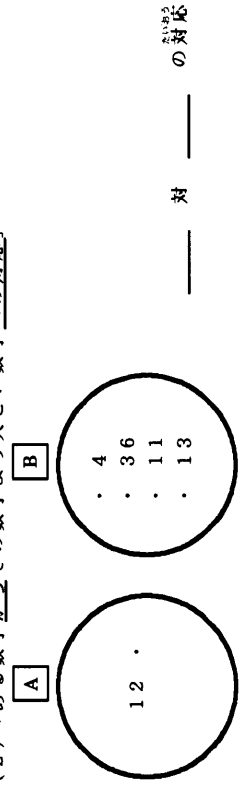
(例2)の場合は、対応の先が1つには決まらないので、この関係は関数の関係ではありません。()

練習1 集合AからBへの対応を考えます。対応するものを矢印で結びましょう。また、その対応は1対1、1対多、多対1の、どの対応となっているか答えましょう。

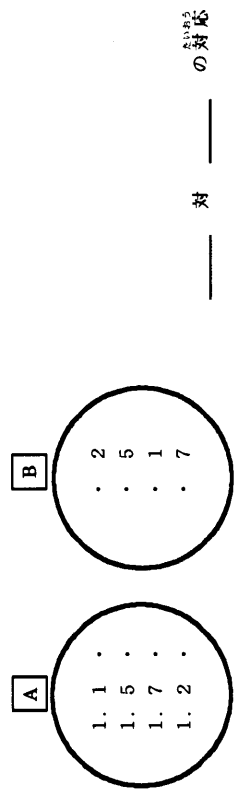
(1) 「ある数字からその数字を2倍して4を足した数字への対応」



(2) 「ある数字からその数字より大きい数字への対応」



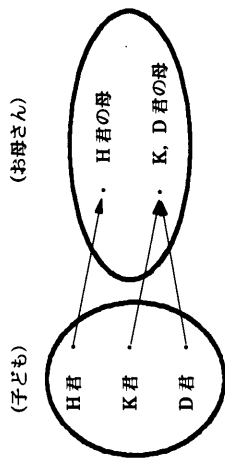
(3) 「ある小数からその小数の整数部分への対応」



練習2 練習1で関数の関係にあるものの番号を(1)～(3)から選びましょう。

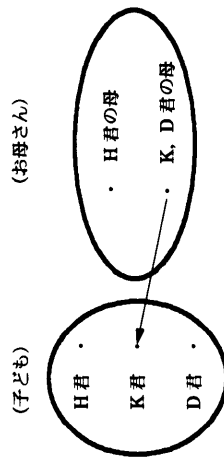
☆③ 逆の対応

例 ☆②の例では、H君とH君のお母さん、K君とK君のお母さん、D君とD君のお母さんそれぞれ矢印で結びました。



これらを、「H君からH君の母への対応」(1対1の対応), 「K君, D君からK, D君の母への対応」(多対1の対応)と言いました。

それでは、お母さんから子どもへの対応を考え、矢印で結んでみましょう。



これらを、「H君の母からH君への対応」(1対1の対応), 「K, D君の母からK君, D君への対応」(1対多の対応)と言います。

特に、このような対応を、☆②の「逆の対応」といいます。

☆④ 多変数の対応

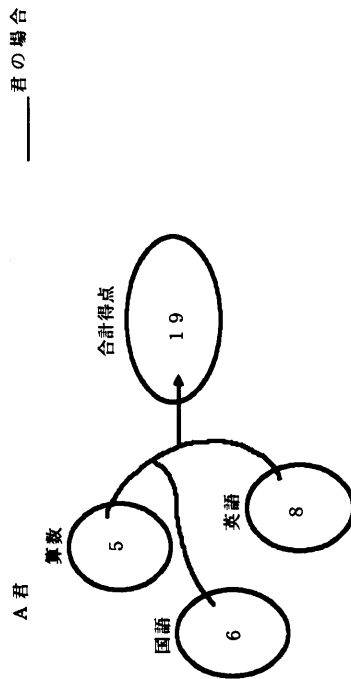
例 3教科の成績から合計得点への対応を考えてみましょう。

	国語	算数	英語	合計
A君	5	6	8	19
B君	10	8	7	
C君	3	10	6	
D君	6	9	9	

この場合は、国語・算数・英語から合計得点への対応となっています。このような、2つ以上のものから1つのものが決まる関係もあります。

これを集合の記号 { } を使って表すと、
A君 { 5, 6, 8 } → { 19 }

これを集合の図を使って表すと、



となります。

◎ 考えてみよう!!
この対応は関数といえるでしょうか？

One Point!!

2つ以上のものから1つのものが決まるときでも、対応の先が に 決まるとき、その関係は 関数の関係 です。

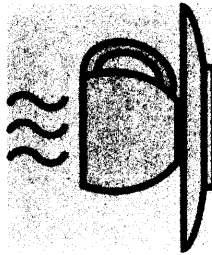
練習 B君, C君, D君についてもA君と同じように集合の図で表し、対応を矢印で結びましょう。

◎ 考えてみよう!!

身の回りで多変数の対応関係にあるものは、どんなものがあるでしょうか？

<確認しよう> 新出単語, 新出記号

ちよつと休憩・・・



コーヒーブレイク

さて、やっと“関数”という言葉がでてきました。

これからは、関数についてもっと詳しく学習していきましょう。

◎ 授業アンケート ◎

____年 ____組 ____番 名前____

このアンケートはのちの授業に役立てるために行うものです。回答者に不利益になるようなことは一切ありませんので、自分が思っていることを素直に答えてください。

次の各質問に対して、当てはまるものに○をつけてください。

(5 : とてもそう思う、4 : ややそう思う、3 : どちらでもない、2 : あまりそう思わない、1 : 全くそう思わない)

1. 数学での集合がどのようなものかわかった。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

2. 集合の表し方がわかった。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

3. 集合どうしの関係に着目することができた。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

4. いろいろな対応にある関係がわかった。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

5. 関数の定義(どのようなものが関数か)がわかった。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

6. 授業に楽しく取り組みめた。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

7. 授業の内容は易しかった。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

8. 授業の題材が興味の持てるものであった。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

9. テキストがわかりやすかった。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

10. 全体的に内容がよく理解できた。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

11. 10で1か2に○をつけた人は、どの内容が良く分からなかったか、簡単に教えてください。

--	--	--	--	--

関数の学習

____年 ____組 ____番 名前 _____

変化するものを調べよう!!

関数の学習では、主に変化するものを調べていきます。今から一緒に、変化しているものを調べていきながら、その方法を学習しましょう。

☆① 変量

◎ 考えてみよう!!

変化するものを調べていくためには、まず、変化しているものを見つけてはいけませんね。そこで、次のことを考えてみましょう。

(1) 教室や家など、身の回りのものを観察して、変化しているものを見つけてみよう。

変化しているものを「変量」といいます。

(あるものがどれだけ変化したのか、その変化した量を指していることもあります。)

(2) 身の回りのものを観察して、変化していないものを見つけてみよう。

変化していないものを「一定量」といいます。

◎ 考えてみよう!! (ちょっと寄り道)

変化するものには“連続的な(すきまのない)変化と離散的な(とびとびの)変化”があります。

たとえば・・・

温度計の温度の変化 と お金の枚数の変化

この違いがわかるかな??

練習 連続的に変化しているものに○をつけよう。

- () 坂道を転がるボールの進む距離
() 0.5 cm の厚さの本を積み上げたときの冊数
() 0.5 cm の厚さの本を積み上げたときの高さ
() 時計の針の回り方

さて、☆①で身の回りのものから、変化しているものを考えましたね。それでは、本格的に変化しているものを調べていくことにしましょう。

遊園地には観覧車があります。観覧車には乗りますか？乗ったことがあります。観覧車の動きをよく見たいですか？観覧車をよーく観察してみよう。

◎考えてみよう!!

観覧車を見て、変化しているものを探しましょう。

--	--

☆② 伴ともなって変わる量

身の回りには、2つや3つ、それ以上のものが密接に変化している場合が多くあります。ここでは、密接に変化しているものを見つけましょう。

◎ 考えてみよう!!

☆①で観覧車を観察し、変化するものを発見しました。その中で、一緒に変わっているものは何でしょうか。2つの伴って変わる量を見つけてみよう。

	が変わると、同時に		が変わっている。
	が変わると、同時に		が変わっている。
	が変わると、同時に		が変わっている。

☆③ 変化の様子

それでは、2量の変化の様子を考えていく第一步目を踏み出すことにしましょう。

☆②で伴^{ともな}って変わる2量を発見しましたね。その2つの量の対応を考えてみましょう。
 ここでは、「時間」と「ゴンドラの高さ」に注目してみたいことにします。

◎ 紫 瑛 花 ◎

伴って変わる量の対応関係を整理するときには「対応表を作る」という方法があります。まずはそれをやってみましょう。

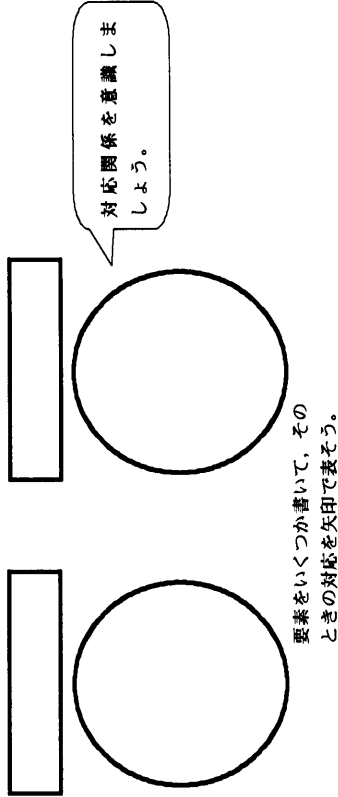
例(1)の図を対称にまわします。
 対称性を利用して、(1)から(4)までの図を対称にまわします。

対応の前を上の段に、対応の後を下の段に書きまます。やってみましょう。

--	--	--

◎ 考えてみよう!!

時間からゴンドラの高さへの対応は関数といえますか？



対応の前のものを といいます。対応の後のものを と

この場合・・・

自変量は 従変量は

ですね。

次に、自変量と従変量の範囲を考えてみましょう。

自変量の範囲はどこからどこまででしょうか？ また、従変量の範囲はどこからどこまででしょうか？

自変量の範囲のことを 従変量の範囲のことを と

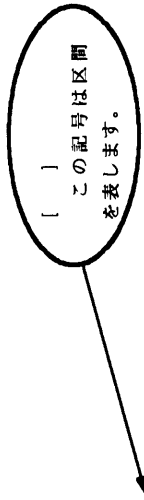
この場合、
定義域は 値域は

さて、それでは関数の本題に少しずつ進ませていきましょう。

◎ **増加や減少**

関数の学習では、変化の様子を調べるのが目的でした。変化には、大きく分けて2種類ありますよね。そう、「増加」と「減少」です。これに、変化しない状態「一定」も含めて考えていくことにしましょう。

対応表から、増加している区間、変化が一定の区間、減少している区間をそれぞれ見つけましょう。



たとえば・・・

増加している区間 $xx [0, 1]$

変化が一定の区間 _____

減少している区間 _____

◎ **変化の割合**

◎ 考えてみよう!!

観覧車の高さの変化がもつとも急なところや最も緩やかなところはどこでしょうか？観覧車を見て考えてみましょう。

◎ 考えてみよう!!

最も高さの変化が急なところと最も変化が緩やかなところではどれくらい変化が違うのでしょうか？

どのように比べたらいでしょうか・・・？

ある区間において、自変量が1増加するときの従変量の増加している値のことを
変化の割合（平均変化率、区間変化率）といいます。
つまり・・・

変化の割合 =

◎ 考えてみよう！！

いろいろな区間で変化の割合を求め、最も変化が急な区間、最も変化が緩やかな区間を求めよう。

最も変化が急な区間

最も変化が緩やかな区間

変化の割合の値と、実際の映像での変化を見比べてみましょう。

◎ 対応図と関数のグラフ ◎

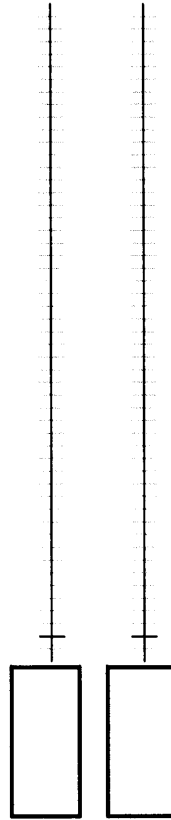
ところで、変化（増加や減少）の様子がひと目で分らないときは、どのようにしたらいいでしょうか？

対応表では増加，減少，一定の区間がひと目ではわかりませんね。

そこで，変化の様子が一目でわかるように，「対応図」や「関数のグラフ」というものがあります。

◎ やってみよう！！

対応表をもとに対応図を作成しましょう。



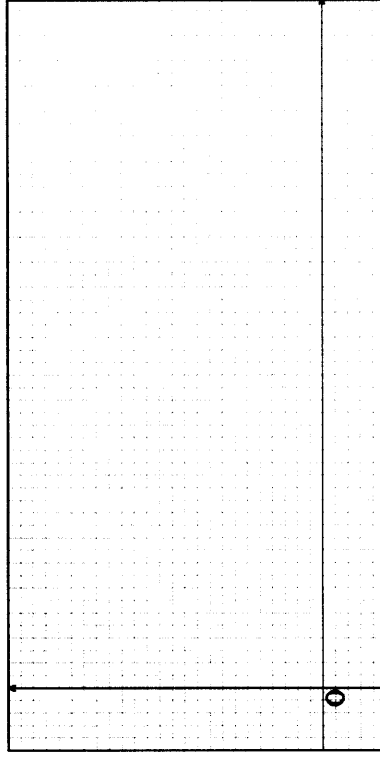
◎ 考えてみよう！！

対応図から増加している区間，減少している区間，変化が一定の区間を読み取りましょう。

また，いろいろな区間で従変量の変化量を考えてみましょう。

◎ やってみよう！！

対応図をもとに関数のグラフを作成しましょう。



◎ 考えてみよう！！

グラフから増加している区間，減少している区間，変化が一定の区間を読み取りましょう。

また，いろいろな区間で従変量の変化量，変化の割合を考えてみましょう。

◎ 関数の式 ◎

この関数を式で表そう。

自変量と従変量の関係を言葉の式で表すと，

_____ となります。

自変量を x ，従変量を y として表すと，_____ となります。

◎ やつてみよう！！

伴って変わる2つの量について調べよう。

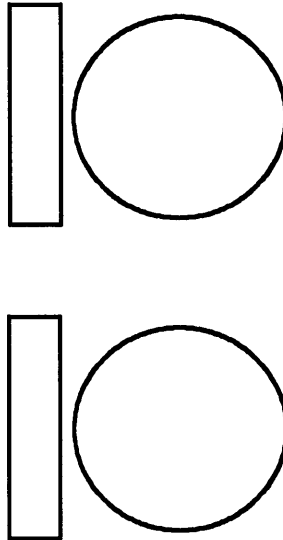
私は、
こもな
伴^{ともな}って変わる_____と_____の関係を調べます。

自変量は_____従変量は_____です。

対応表を作成しよう。

[illegible]

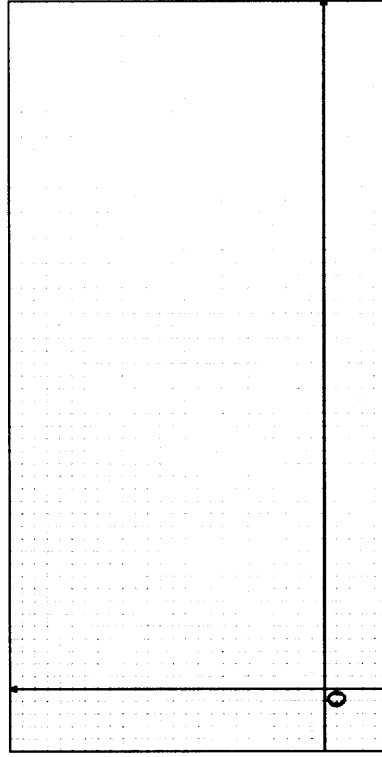
関数の関係にあるか考えてみよう。



定義域は	値域は
(自変量の範囲)	(従変量の範囲)

対応図や関数のグラフを作成しよう。

対応図から関数のグラフ



増加している区間

変化が一定の区間

減少している区間

最も変化が急な区間

最も変化が緩やかな区間

この關係を式で表そう。

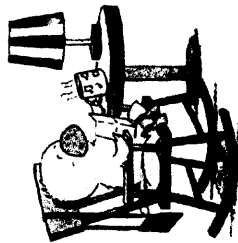
自変量と従変量の関係の言葉の式で表すと、

となります。

自変量を x 、従変量を y として表すと、
_____ となります。

確認しよう＞ 新出単語，新出記号
 変量 一定量 作って変わる量 自変量 従変量 定義域 値域 区間 []
 区間変化率 対応表 対応関 関数のグラフ 関数の式

ちよっと休憩・・・



コーヒープレイク

小鳥の休憩イラスト，<http://green.ap.teacup.com/minifactory/>

◎ 授業アンケート ◎

____年 ____組 ____番 名前 _____

このアンケートはのちの授業に役立てるために行うものです。回答者に不利益になるようなことは一切ありませんので、自分が思っていることを素直に答えてください。

次の各質問に対して、当てはまるものに○をつけてください。

(5 : とてもそう思う, 4 : ややそう思う, 3 : どちらでもない, 2 : あまりそう思わない, 1 : 全くそう思わない)

1. 身の回りの現象から変量を見つけることができた。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

2. 身の回りの現象から伴って変わる変量を見つけることができた。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

3. 連続的な変化と離散的な変化の違いがわかった。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

4. 現象を観察し、対応表にまとめることができた。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

5. 現象から関数の関係にあるものを見つけることができた。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

6. 定義域や値域の意味が分かった。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

7. 変化の割合の意味がわかった。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

8. 変化の割合を求めることができた。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

9. 変化の様子を対応図で表すことができた。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

10. 変化の様子を関数のグラフで表すことができた。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

11. 自変量と従変量の関係を式に表すことができた。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

12. 授業に楽しく取り組み組めた。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

13. 授業の内容は易しかった。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

14. 授業の題材が興味の持てるものであった。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

15. テキストがわかりやすかった。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

16. 全体的に内容がよく理解できた。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

17. 16で1か2に○をつけた人は、どの内容が良く分からなかったか、簡単に書いてください。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

--	--	--	--	--

関数の学習の発展

____年 ____組 ____番 名前 _____

空間にあるものの位置を表そう

※空間にあるものの位置を表現する方法を学習しよう※

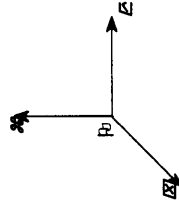
空間座標

◎ やってみよう!!

教室や部屋の中の空間にあるものの位置を表現してみよう。
どのような表現の仕方があるでしょう。

【確認】

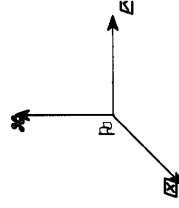
空間の位置を表すときは座標空間を用いることがあります。
座標空間とは次のような図のことをいいます。



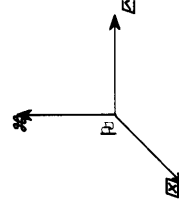
例 点 (2, 4, 1) を上の座標空間に書きなさい。

練習 次の点を座標空間に書きなさい。

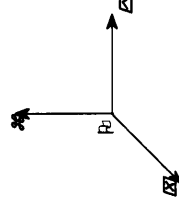
(1) (4, 1, 2)



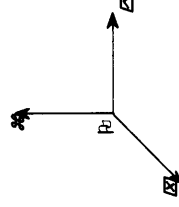
(2) (5, 5, 5)



(3) (0, 3, 2)



(4) (3, 2, -1)



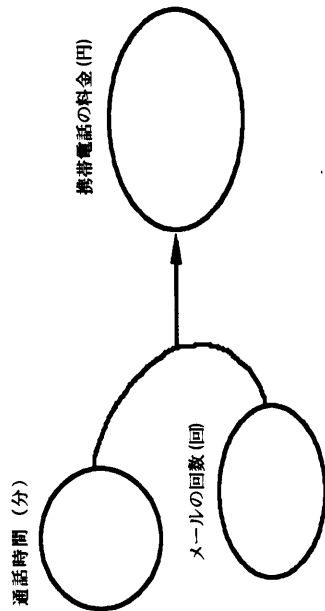
携帯電話の料金を調べよう!!

現在の中学生はどのくらい携帯電話を持っているでしょうか？ 調べてみよう。

携帯電話を使って電話やメールをすることが多いですね。
では、それぞれどのくらい料金がかるのでしょうか？

◎ やってみよう ◎

一日の通話時間とメールの回数を記録して、携帯電話の料金を求めてみよう。



これからは、通話時間とメールの回数という2つのもので料金が決まるということを考えていこう。

◎ 調べてみよう ◎

通話は1分間に約_____円です。 メールは1通で約_____円です。

通話時間を x 分、メールの回数を y 回として、それぞれの料金を x, y を使って表そう。

通話 約 _____ 円 メール 約 _____ 円

携帯電話の料金が、通話とメールのみで決まるとします。

このとき、自分の携帯の料金を z 円とすると、 z は x, y を使ってどのように表されま
すか？

$z =$ _____

◎ 考えてみよう!!

通話が6分、メールが5回では、料金はいくらになるか？

通話が2分、メールが15回では、料金はいくらになるか？

通話が30分、メールが1回では、料金はいくらになるか？

携帯電話は通話時間とメールの回数によって、どのように変化するでしょうか？詳しく調べてみよう。

まずは・・・

メールの回数を決めてから、通話時間と料金の関係を表にまとめよう。

(0) メール回数 (0 回) 料金を表す式は $z =$ _____

x	通話時間 (分)	0	2	4	6	8	10
z	料金 (円)						

One Point!!

一方の値を決めてから、もう一方の値を変化させて考えることを、
_____ して考える、といいます。

変数を固定したら、
1 次関数と同じ形
になるね。

他の場合でも表を作成してみよう。

(1) メール回数 (2 回) 料金を表す式は $z =$ _____

x	通話時間 (分)	0	2	4	6	8	10
z	料金 (円)						

(2) メール回数 (4 回) 料金を表す式は $z =$ _____

x	通話時間 (分)	0	2	4	6	8	10
z	料金 (円)						

(3) メール回数 (6回) 料金を表す式は $z =$ _____

x	通話時間 (分)	0	2	4	6	8	10
z	料金 (円)						

(4) メール回数 (8回) 料金を表す式は $z =$ _____

x	通話時間 (分)	0	2	4	6	8	10
z	料金 (円)						

(5) メール回数 (10回) 料金を表す式は $z =$ _____

x	通話時間 (分)	0	2	4	6	8	10
z	料金 (円)						

つぎは・・・

通話時間を決めてから、通話時間と料金の関係を表にまとめよう。

(0) 通話時間 (0分) 料金を表す式は $z =$ _____

y	メール回数 (回)	0	2	4	6	8	10
z	料金 (円)						

(1) 通話時間 (2分) 料金を表す式は $z =$ _____

y	メール回数 (回)	0	2	4	6	8	10
z	料金 (円)						

(2) 通話時間 (4分) 料金を表す式は $z =$ _____

y	メール回数 (回)	0	2	4	6	8	10
z	料金 (円)						

(3) 通話時間 (6分) 料金を表す式は $z =$ _____

y	メール回数 (回)	0	2	4	6	8	10
z	料金 (円)						

(4) 通話時間 (8分) 料金を表す式は $z =$ _____

y	メール回数 (回)	0	2	4	6	8	10
z	料金 (円)						

(5) 通話時間 (10分) 料金を表す式は $z =$ _____

y	メール回数 (回)	0	2	4	6	8	10
z	料金 (円)						

携帯の料金を表すグラフを作成しよう。

<目標>

$$z = \boxed{} + x \boxed{} \quad y \text{ のグラフを作成してみよう。}$$

どのような形になるのだろうか??

<予想>

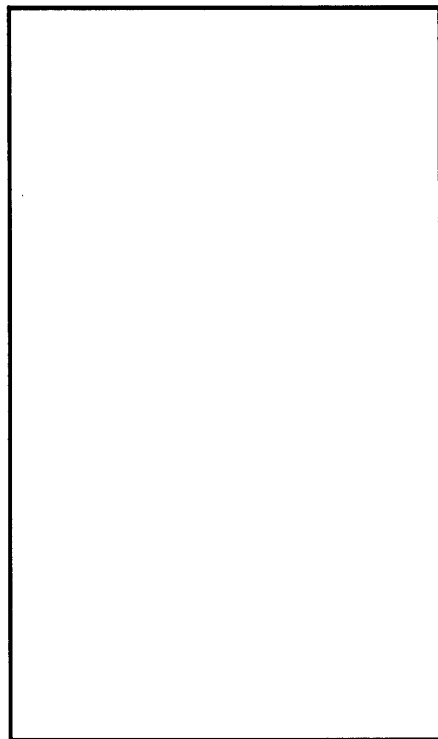
◎ やってみよう ◎

表をもとに、それぞれの1次関数のグラフを作成してみよう。

◎ やってみよう ◎

$$z = \boxed{} + \boxed{} x \quad y \text{ のグラフを作成してみよう。}$$

携帯電話の料金のグラフはどのようなになりましたか？絵や言葉で表してみよう。
予想と比べてみましょう。



◎ 考えてみよう！！

携帯料金を今よりも減らすためには、通話時間、メールの回数をどのように変えればよいでしょうか。グラフを利用して考えよう。

◎ 考えてみよう！！

携帯料金が同じ料金となるのは、通話時間、メールの回数がそれぞれどのような場合でしょうか。グラフを利用して考えよう。

＜確認しよう＞ 新出単語、新出記号
座標空間 2変数関数 2変数関数の式 変量の固定 2変数関数のグラフ

◎ 授業アンケート ◎

____年 ____組 ____番 名前 _____

このアンケートはのちの授業に役立てるために行うものです。回答者に不利益になるようなことは一切ありませんので、自分が思っていることを素直に答えてください。

次の各質問に対して、当てはまるものに○をつけてください。

(5 : とてもそう思う, 4 : ややそう思う, 3 : どちらでもない, 2 : あまりそう思わない, 1 : 全くそう思わない)

1. 2変数(以上)の対応の関数があることがわかった。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

2. 2変数の関数を式で表すことができた。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

3. 変数を固定して考える意味がわかった。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

4. 変数を固定して、一次関数の式と表をかくことができた。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

5. 立体グラフを作成できた。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

6. 立体グラフの意味がわかった。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

7. 2変数の関数の値の調べ方がわかった。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

8. 授業に楽しく取り組みめた。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

9. 授業の内容は易しかった。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

10. 授業の題材が興味の持てるものであった。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

11. テキストがわかりやすかった。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

12. 全体的に内容がよく理解できた。

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

13. 12で1か2に○をつけた人は、どの内容が良く分からなかったか、簡単に書いてください

--

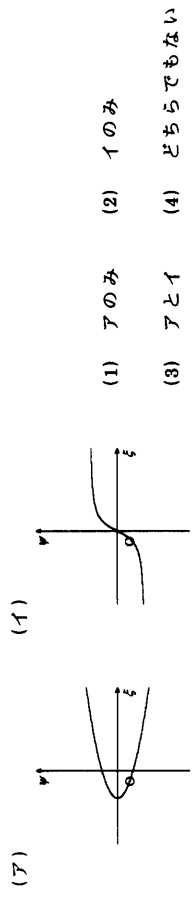
調査問題

年 組 番 名前

1 連続的に(すきまなく)変化しているものに○をつけてください。

- () なわとびで前飛びをしたときの回数
- () コップのジュースを飲んでいくときのジュースの高さ
- () アサガオが成長するときの茎の長さ
- () 厚さ 0.1 cm の板を重ねていくときの高さ

2 x から y への対応を考え、その対応のグラフが次のようになる時、関数のグラフといえるのはどのグラフでしょうか。(1)～(4)から選び、番号を○で囲んでください。また、どのように考えたかを簡単に書いてください。

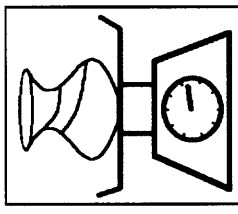


- (1) アのみ
- (2) イのみ
- (3) アとイ
- (4) どちらでもない

3 右のような形のつばに砂を入れて重さをはかります。砂の量からつば全体の重さへの対応は(つば全体の重さは砂の量の)関数といえますか。

- a 関数といえる
- b 関数とはいえない

理由：



4 次のそれぞれの関数において、x の値が -1 から 2 まで変化するときの y の値の変化量、及び変化の割合を求めてください。

(1) $y=2x-2$	(2) $y=10$	(3) $x+y-6=0$
y の変化量	y の変化量	y の変化量
変化の割合	変化の割合	変化の割合

5 観覧車の「中心角(°)と中心軸からのゴンドラの距離(m)」の関係についての表があります。この表をもとに各問に答えてください。

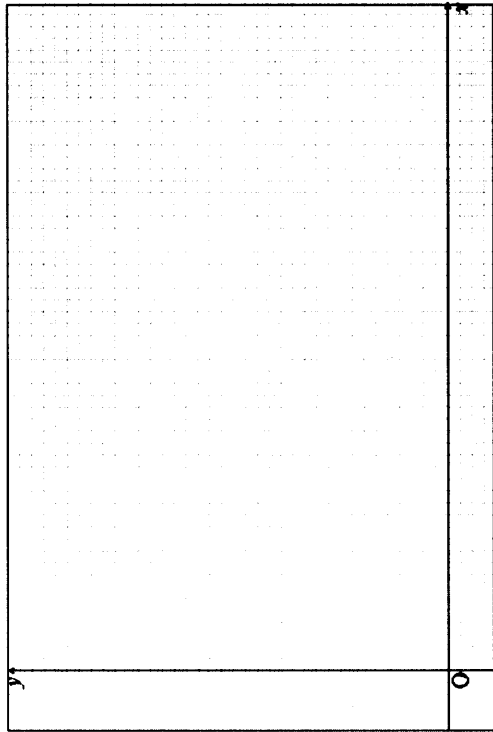
角度(°)	0	20	60	100	110	125	165
距離(m)	6	7	5	1.5	0	2	5



(1) 距離が最も急激に増加している(増加の割合が大きい)場所を①～⑥から選んでください。 答え：_____

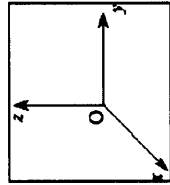
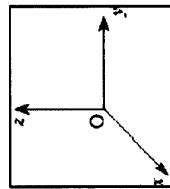
(2) (1)でどのように考えたか、簡単に書いてください。

- 6 深さが 30 cm ある直方体の容器に、毎分 4 cm ずつたまたまる速さで 8 分間水をいれまし
た。
8 分後に水を止め、すぐに栓をぬき、今度は毎分 10 cm ずつ減る速さで 5 分間容器か
ら水を出しました。
時間の経過を x (分)、水の高さを y (cm) とし、その関係をグラフに表してください。



- 7 次の座標を、下の座標空間に表してください。

- (1) (1, 3, 5) (2) (-2, 1, -4)



最後に

- (1) 授業を受けて、関数に対するイメージが変わりましたか。

- a 変わった b 変わらない

- (2) (1)で「変わった」と答えた人は、どのように変わったか、「変わらなかった」と
答えた人は、今も残っている関数に対するイメージを教えてください。

- (3) 携帯料金の値の変化を調べる授業を受けての感想を教えてください。

- (4) 全体 (4 回分) の授業を受けての感想を教えてください。

授業に参加してくれてありがとう。