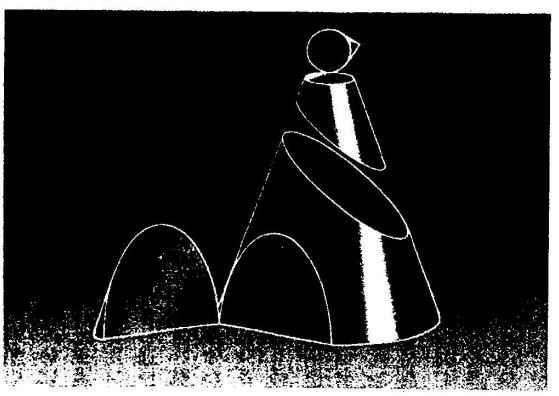
逆２乗法則と物体の軌道

数学科　藤本正裕

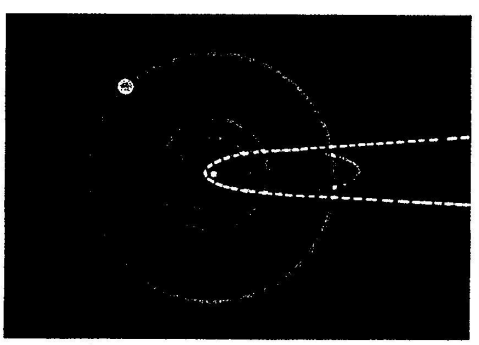
地球は太陽を焦点のひとつとする楕円軌道をえがく．このことはエネルギー保存則を用いて示されるのが一般的であろう．本校でも保存則に基づいて楕円軌道の方程式を導く授業の実践報告（奥田1999）がある．　ところで，「ニュートンの運動の第２法則，重力の逆２乗法則が成り立てば，物体は円錐曲線に沿って運動する．」　ここでは，この第２法則，逆２乗法則だけをもとに，数学III，数学Ｃの知識の範囲内で，また短時間内で，ある程度の内容を生徒に示す展開例を報告したい．筆者も一昨年に，担当の数学Ｃの授業で，その講座の生徒が全員物理を履修していたこともあり，この話題をとりあげた．



円錐曲線．円錐をいろいろな角度で切ったり断面を取ったりすると，さまざまな形がつくられ，それらを総称して円錐曲線と呼ぶ．ここでは円錐の表面を灰色で示し，３つの円錐曲線を青で示す．ここに示した４つの断片を組み合わせると，ふたたび円錐ができる．円錐のてっぺんを頂点と呼び，平らな底を底面と呼ぶ．底面に平行に切ると，円ができる．斜めに切ると，引き延ばされた長円形に少し似た楕円と呼ばれる形ができる．もし底面に垂直に切ると，現われる面は双曲線である．円や楕円とちがい，双曲線は閉じた曲線ではない．ここには示していない，もう１つの曲線がある．それは楕円から双曲線に移る境にあって，放物線と呼ばれる．これらの美しい円錐曲線は，紀元前３世紀の後半にペルガのアポロニウスがはじめて描いたものである．惑星や彗星が太陽のまわりをこのような軌道に沿って回るのを知っていることや，空気中に投げ上げられた石の軌道が放物線に沿っているのは驚くべきことである．弾道ミサイルも放物線に沿って飛ぶ．ニュートンは重力の逆２乗法則が物体に働くと，物体は円錐曲線に沿って運動することを示した．一見抽象的な数学と，世界の実際のあり方とのこのような関係が，現代科学をつくりあげてきた



参考資料３より



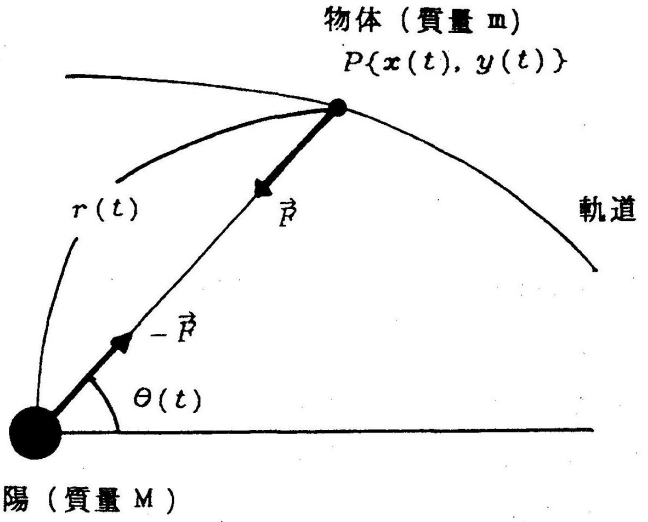
参考資料２より

もし彗星が太陽に近づいた時しか彗星を追跡できなければ，私たちは彗星の軌道を決定することができないだろう．この図で同心円はそれぞれ地球，火星，木星の軌道である．星間空間からやってきた放物線あるいは双曲線軌道をもつ彗星（黄色い点線）は，楕円軌道をもつ彗星（赤い閉曲線）と簡単には区別することができない．（Ｊ．ロンバーグ/ＢＰＳ図）

太陽と物体について，図のように軌道上の点 P，距離 $r(t)$，なす角 $\theta(t)$，働く力 $\vec{F}$ を設定する．

t は時刻を表す．

また $r(t) \neq 0$ とする．



物体の位置 $P\{x(t),\ y(t)\}$ にたいして

$$x(t) = r(t)\cos\theta(t) \qquad \cdots\cdots (1)$$

$$y(t) = r(t)\sin\theta(t) \qquad \cdots\cdots (2)$$

以後，簡略化のため (t) は省くが，r，θ ともに t の関数であることに注意．

○ニュートンの運動の第２法則

$$\vec{F} = \mathrm{m}\,\vec{\alpha} = \left(\mathrm{m}\frac{d^2x}{dt^2},\ \mathrm{m}\frac{d^2y}{dt^2} \right) \qquad \cdots\cdots (3)$$

○重力の逆２乗法則（万有引力の法則）

$$|\vec{F}| = \mathrm{G}\frac{\mathrm{Mm}}{r^2} = K\frac{\mathrm{m}}{r^2} \quad (\mathrm{GM} = K \text{ とおく})$$

$$-\vec{F} = \left(|\vec{F}|\cos\theta,\ |\vec{F}|\sin\theta \right)$$

$$= \left(K\frac{\mathrm{m}}{r^2}\cos\theta,\ K\frac{\mathrm{m}}{r^2}\sin\theta \right) \qquad \cdots\cdots (4)$$

以上の前提となる式 (1)~(4) から次の２階の微分方程式が得られる．

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -K\dfrac{x}{r^3} & \cdots\cdots (5) \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -K\dfrac{y}{r^3} & \cdots\cdots (6) \end{cases}$$

さて，軌道上の点 $P(x\ ,\ y)$ が満たす２階の微分方程式(5)，(6)を解けばよいわけであるが，この微分方程式の一般解を求める（この微分方程式を解く）ことを授業でおこなうには，知識面，技巧的な面などから，どうしても多くの時間数が必要となってくる．序文で述べたように，そこまでおこなうことが目的ではない．本稿では，微分方程式(5)，(6)の一般解を導いていく過程は省き，太陽を焦点のひとつとする円錐曲線が，微分方程式(5)，(6)を満たしていることを確認していく手順を示したい．（したがって円錐曲線以外に(5)，(6)を満たす曲線があるかどうかについては言及していない．実際には円錐曲線だけなのだが．）

太陽を焦点のひとつとする円錐曲線が微分方程式 (5)，(6) を満たすことを確認していくにあたっては (5)，(6) から導かれる次の２つの式が重要［特に(8)］となる．

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C\ (\text{定数}) \qquad \cdots\cdots\ (7)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2} \qquad \cdots\cdots\ (8)$$

(7) の証明

$$\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)$$

$$= \frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + x\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{dx}{dt} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \leftarrow (5),(6)\text{を代入}$$

よって，ある定数 C があって $x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt} = C$ が成り立つ．

(8) の証明

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ の両辺を t で微分すると

$$\frac{d}{dt}\tan\theta = \frac{d}{d\theta}\tan\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt}}{x^2} = \frac{C}{x^2} \quad \leftarrow (7)\text{ を代入}$$

よって，$\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{C\cos^2\theta}{x^2} = \dfrac{C}{r^2}$ $\leftarrow (1)$ を代入

補足　方程式（8）を用いれば「面積速度一定の法則」が導ける．本稿の最後に示す．

では，円錐曲線が微分方程式（5），(6)を満たすことをみていこう．

太陽を焦点のひとつとする円錐曲線は

$$\text{極方程式}\quad r = \frac{A}{1 + e\cos\theta}\quad (A > 0,\ e > 0) \qquad \cdots\cdots (9)$$

で表される．周知のとおり e は離心率で，$0 < e < 1$ のとき楕円，$e = 1$ のとき放物線，$e > 1$ のとき双曲線を表す．

(9) で $A = 1$ すなわち $r = \dfrac{1}{1 + e\cos\theta}$ として一般性を失わない．

さて，$x = r\cos\theta = \dfrac{\cos\theta}{1 + e\cos\theta}$ より

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$$= \frac{-\sin\theta(1 + e\cos\theta) - \cos\theta(-e\sin\theta)}{(1 + e\cos\theta)^2}\frac{d\theta}{dt}$$

$$= \frac{-\sin\theta}{(1 + e\cos\theta)^2}\frac{d\theta}{dt}$$

この式に $\dfrac{1}{1 + e\cos\theta} = r$ および (8)の $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{C}{r^2}$ を代入すると

$$\frac{dx}{dt} = -C\sin\theta$$

となる．これをさらに t で微分して

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(-C\sin\theta\right) = -C\frac{d\sin\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -C\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

これに $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$，(8) の $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{C}{r^2}$ を代入すれば

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -C^2\frac{x}{r^3}$$

となる．よって適当な定数 C を選べば微分方程式（5）をたしかに満たしている．

同様に y についても

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\cos\theta + e}{(1 + e\cos\theta)^2} \frac{d\theta}{dt}$$

$$= C(\cos\theta + e)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -C\sin\theta \frac{d\theta}{dt} = -C^2 \frac{y}{r^3}$$

となり，微分方程式(6)を満たしていることがわかる．

補足　(8)の $\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2}$ を用いると

$$\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 \, d\theta = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} r^2 \frac{d\theta}{dt} dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} r^2 \frac{C}{r^2} dt$$

$$= \frac{C}{2}(t_2 - t_1)$$

これは面積速度一定の法則を表している．

参考資料

1．奥田(1999) 太陽のまわりの地球の運動　附属高校研究紀要　第６５号

2．カール･セーガン，アン･ドルーヤン，小尾信彌訳　ハレー彗星　集英社

3．手塚治虫編　世界の科学者　中央公論社