

スーパーサイエンスハイスクールにおける数学単元設定と教材の開発

～【学校設定科目「代数幾何」】その(2)～

京都教育大学教育学部附属高等学校

数 学 科 河 崎 哲 嗣

概 要： 旧学習指導要領の「数学C」の単元の中には行列がある。ベクトルの成分としての意識の定着は、数学Bと数学Cを履修するタイムラグがかなりあるために、ほとんど期待ができない。また通常数の場合と同様に、加法、減法、乗法などの演算を定めて演算の性質を学習し、さらに逆数に相当するものとして「逆行列」を定義し、これを利用して連立方程式の行列による解法を考えることになる。しかし、正方行列Aの A^{-1} を求める具体的なメカニズムや行列Aの利用が1次変換に繋がるという将来性について明記されておらず教育現場に委ねられているといえよう。学習指導要領の枠を越えて自由に取り組めるSSHである本校では、スムーズな高大接続に繋がるカリキュラムを視野に入れて研究しており、学校設定科目「代数幾何」では行列と1次変換の繋がりを図形的表現のイメージを重視して構成を考えた。

検索語： SSH 代数幾何 1次変換

1 はじめに

「代数幾何」(第2学年、3単位)において1次変換を取り入れた理由は、2点ある。

1つ目は、1年次に学校設定科目「応用数学Ⅰ」において、フラクタル幾何学を扱っているが、自己相似性を追求する教材として木の葉のモデリングにコンピュータ画像処理を利用する授業を実施した。しかし、この時はタイの高校生と「テレビ会議・遠隔授業システムを用いた協同学習」を目指しての慌ただしい期間のため、5～6名の生徒へ特別に行列をレクチャーしたのみでクラス全員には浸透していなかった実情がある。

2点目は、通常2単位である「数学C」の授業が、行列・2次曲線・極座標の単元を9月下旬には終了している点であり、扱いによっては行列そのものの内容を「数の計算」程度で終えている現状が多く、工夫もなく味気ない実態がある。

以上のように、できるだけ多くの生徒に相似、回転、対称変換を表す行列があることを負担なくイメージを与えて、図形的変換と行列の計算の対応を繋ぐ意識を育てたいと考えた。

本校のSSH研究のねらいには「自然現象の法則性を理解し、その構造の解明に意欲的に根気よく取り組む生徒を育てる」、「科学技術の開発に興味・関心をもって創造的に取り組む生徒を育てる」、「意欲的に情報を取り入れ、表現・発信していく生徒を育てる」とある。上記のねらいに準拠すれば、1次変換の教材を利用することで生徒には代数的なイメージから、幾何的なイメージが加わる。また日常の科学技術(ex. コピー機の原理)に付随した指導も考えられ、扱い方には十分な検討が必要だが、大切な単元として取り組む必要があるのではと考える。

2 授業の内容と構成の工夫

この授業のねらいは、(1)正方行列がどんな変換を表す行列で、行列の計算とどう関わるのかのイメージを重視する、(2)視覚教材を有効に利用し、限られた時間内で1次変換に興味を与える、ということにした。従って、どこまで十分な説明や証明が必要なのかどうかはプリント学習を採用し回収した上で、その取り組みの実態を分析して学習内容の難度や教材の評価を考えることにした。

本学2回生の参観観察実習の一環で本授業を公開するために、「逆行列」「連立1次方程式」をせずに「行列の積」の後で取り組む内容とした。実施授業時間数については2時間であるが、3時間が適当と考える。

1 時間目

① 行列の積(ベクトルという意識)

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 150^\circ & -\sin 150^\circ \\ \sin 150^\circ & \cos 150^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

② 写像と一次変換(点から点への移動)

(1) 1次変換 f の定義: $f: (x \ y) \rightarrow (x' \ y')$ で $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$ のとき、 f を点 (x, y) を

点 (x', y') に移す1次変換またはベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ にうつす1次変換という。上の1次変換 f は、

行列を用いて $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表すことができる。さらに $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{x}$, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \vec{y}$ と

おくと、 $\vec{y} = A\vec{x}$ の形に表せる。

(2) 1次変換 f の性質: f の線形性 任意のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して、

$$f(k\vec{a} + l\vec{b}) = kf(\vec{a}) + lf(\vec{b})$$

③ grapes*で確認する。

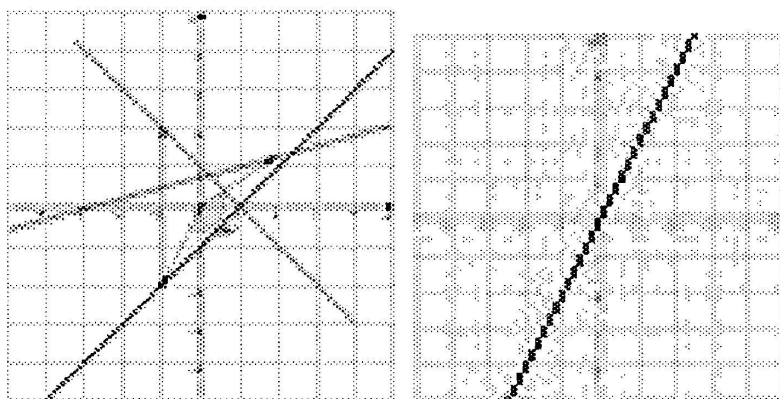
(1) ①(1)の、点 $(1, -1)$ は直線 $y = -2x + 1$ 上の

*友田勝久、大阪教育大学教育学部附属池田高校、関数グラフソフト(free)

点である。この直線上の任意の点はどのような図形上の点にうつるか。

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos 150^\circ & -\sin 150^\circ \\ \sin 150^\circ & \cos 150^\circ \end{pmatrix}$ の変換

(3) 上記の行列で積の交換法則が成り立つとは限らないという確認と合成変換においても違いがあるということの指導。1(3)の変換を表す行列は、任意の点が直線 $y = 2x$ にうつす。

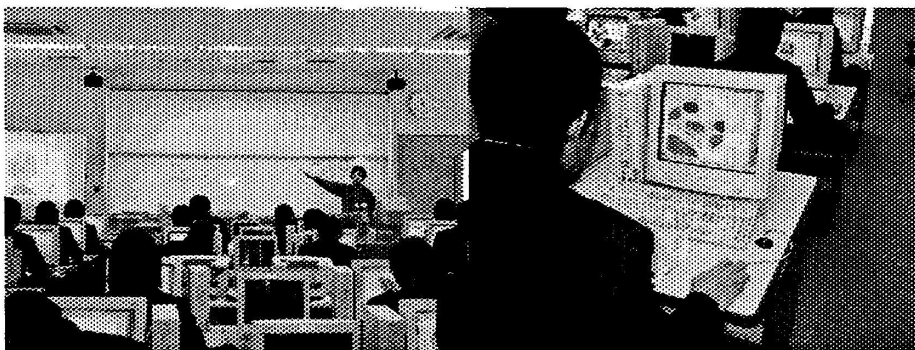


(4) y 軸、原点、直線 $y = x$ 、直線 $y = -x$ 、直線 $y = mx$ 、直線 $y = \tan \theta x$ それぞれに関する対称行列を求める。

2時間目

4 grapes の「ワンパク」を起動する。正方行列の各成分 a, b, c, d に数値を代入してどのような変換か確認する。

(1) $kE = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \quad (k \neq 0)$ 【相似変換】



(2) (i) 60° (ii) 225° 【回転変換】

(3) x 軸, 直線 $y = -x$, 直線 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ 【対称変換】

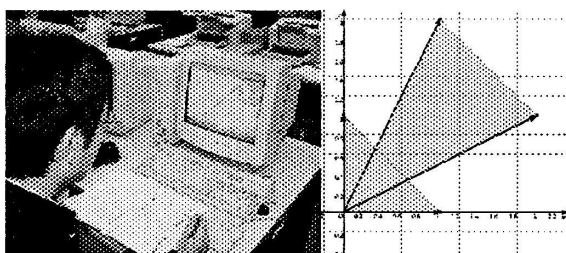
(4) 直線 $y = \frac{-1}{2}x$ 【不動直線】

(5) 各成分 a, b, c, d を変えて、特徴を掴む。

※ 図形の面積と向きの変化に着目させる。(拡大・縮小)

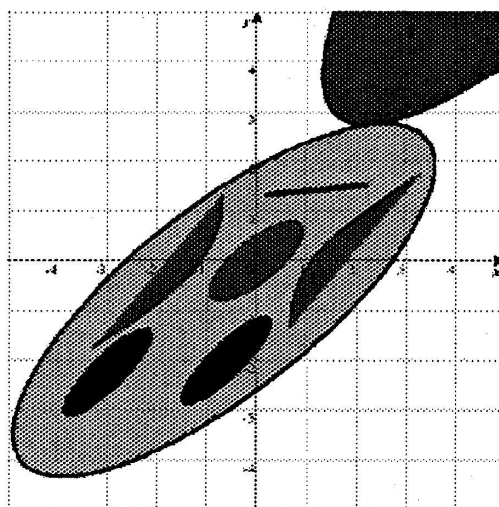
①ある図形 T が対角行列 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ によって表される1次変換によってうつされた像を T' とすると、

$(T' \text{の面積}) = |ad| \times (T \text{の面積})$ が成り立つ。



対角行列 $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{pmatrix}$ について、 A^n の様子と点が

$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ によってどうなるのか。



②対角行列以外の行列では、

$(T' \text{の面積}) = |ad - bc| \times (T \text{の面積})$ が成立する。

・ $\det A = ad - bc$ は、ベクトル積 $(\vec{a} \times \vec{b})$ ・平行四辺形の面積。 $S = \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right| \sin \theta$ で説明

・ $\det A > 0$ のとき、図形の向きを変えずにうつす

・ $\det A < 0$ のとき、図形の向きを逆向きにうつす

→ 逆行列、 A^{-1} 、連立1次方程式へと続く

3 生徒の様子と考察

授業プリントは書き込み式にし、授業後即回収をした。欠席者やパソコンに集中して十分に書き込みのでき

	理解項目	理解不可	←	ふつう	→	よく理解
基本的説明	変換を表す行列は点→点へうつす	0.02	0.05	0.08	0.11	0.69
	合成変換を表す行列と行列の積の交換との関連	0.08	0.08	0.16	0.38	0.25
	不動点、不動直線	0.13	0	0.13	0.16	0.50
	y軸、原点、 $y=x$ 、 $y=-x$ (対称行列)	0.05	0.05	0.05	0.11	0.64
	$y=\pi x$ 、 $y=\tan \theta x$ (対称行列)	0.11	0.08	0.61	0.05	0.08
成分の決定	半分の大きさ (相似変換)	0.14	0	0.02	0	0.77
	回転移動	0.27	0.05	0.13	0.05	0.39
	直線に関する対称移動	0.03	0.03	0.25	0.44	0.19
	直線 $y=1/2x$ 上にうつす	0.42	0.17	0.08	0	0.22
観察	行列成分の役割	0.05	0.05	0.05	0.05	0.76
	$ \det A $	0.22	0.11	0.11	0	0.56

(表1)

ていない者が数名存在したので、データから除外した。

本校のSSHの第2学年は、「理科・数学が好き」な集団であるが、入学以来学力にはかなりばらつきがある。某k社の模擬試験も数学の偏差値70を越える生徒が、過半数近く存在するのに対し、50付近も数名存在する。また理科が好きだが数学は嫌いであるという者も少なからず存在して、「理科・科学技術に通じる数学」をスタンスにしている。今後は、数学に興味を持っている生徒がどの程度教材を理解しているのか等を細かくデータを分析しようと考えている。従って今回の授業も、黒板で学んだ理論を実際の実験機器としてパソコンを駆使してシミュレーションするというありふれた手法を使っている。しかし教科書の単元にならない分野を、また「実際どのように使われるのか」を「短時間でイメージをつける」という目的としては、今回の授業は成功したように思える。

(表1)の理解不可のポイントが高いのは、少し不親切な説明であったということと「逆行列」「連立1次方程式」を学習して、行列の計算のメカニズムにある程度長けておれば予想がついたことであろう。授業時間を増やせば対応できるが、不動点、不動直線をさらに進めて特に取り扱うことは避けた。教科書の行列計算での「固有値」も明記を避けているように、その値が座標平面上の図ではどのような意味を成すのかということも、十分な時間が必要で、興味のない生徒も含めて全員に指導を加えることは不可能であろう。固有値の種類に精通していないと難しいという理由もある。「課題研究」として取り組ませる方法としての可能性も見いだせる。さらに行列式を、外積(右ネジの法則)まで発展させたがこれは物理との融合教材への展開を考えたものである。また、今回平面図形の移動を中心にしたが、3行3列の行列が空間図形の移動を可能にしているということも生徒に指導していきたいと考えている。

なお平行移動を加えたアフィン幾何については、この学習を下に応用数学Ⅱで取り組んでいる。

4 まとめと課題

1次変換は、行列を幾何的に捉える為に有効な単元である。しかし、どの辺りまで学習するかは加減を誤ると逆に興味が薄れることが多い。今回好結果を得た「イメージを大切にする」をさらに理論的に指導したいが、高校の現状では個人単位に学習する機会を与えて、彼らに委ねるのが好ましいのではと考える。

それに対して複素数平面における対称・回転移動も大切であり、自然な数 e を用いれば「日常の生活の中の科学技術」に貢献している貴重な単元である。どのようにして1次変換と釣合を保つかは、どちらも高い評価を得ている数学単元なだけに、どちらもバランス良く教えたい。また高大接続というニーズでは、大学2年生辺りで学ぶ「線形代数」の教育内容とは大きなギャップがあるために、学生が悪戦苦闘する内容である。是非高校側でも少しは将来の学習の負担を軽減するために、興味を損なわない形で取り組ませる単元構成を考えていくべきであろう。

引用・参考文献

- [1] 秋山 仁 著、講義5 1次変換のしくみ、駿台文庫、1995年1月30日
- [2] 矢野健太郎 著、立体解析幾何学、裳華房、昭和59年12月
- [3] 高橋 睦男 他6名 著、四訂版 高等学校 代数・幾何、数研出版、平成3年3月