スーパーサイエンスハイスクールにおける数学単元設定と教材の開発

～【学校設定科目「代数幾何」】その(1)～

京都教育大学教育学部附属高等学校
数学科　河崎哲嗣

概　要: 本校はスーパーサイエンスハイスクール(以後SSHと記す)に認定され、今年度で2年目を迎えている。3年間の数学カリキュラムの内容を数学ⅠA, 学校設定科目(「解析」,「代数幾何」,「確率統計」,「現代数学研究」,「応用数学Ⅰ」,「応用数学Ⅱ」)とし、単元を組み替えた構成での指導を実施している。また独自の教科内容・教材づくりを進めているが、今回の報告では「代数幾何」(第2学年次)について、1学期に実施した内容(空間ベクトル「空間図形への応用」)について実践報告をする。
検索語: SSH 代数幾何 逆遠近法

1 はじめに

本校のSSH研究のねらいには**「科学技術の開発に興味・関心をもって創造的に取り組む生徒を育てる」、「意欲的に情報を取り入れ、表現・発信していく生徒を育てる」**とある。本校では自然科学コースという名の下に各学年1クラス40名で構成し、現在は第2学年が1期生となっている。また「解析Ⅰ・Ⅱ」「代数幾何」「確率統計」の指導方針として分野ごとの系統的・効率的な再編をし、また新たな単元(微分方程式、推定・検定等)を柔軟に取り込むことを目指している。年間計画は、それぞれの学年ごとに違った学習指導要領(第1学年は「新」と第2学年は「旧」)を意識しているために、若干の学年間に相違がある。代数幾何(3単位)の計画では、第2学年(平成14年度入学生)と第1学年(平成15年度入学生)とを比較すれば、大きな柱は表1のようになっている。

(表1)

	第2学年	第1学年
1学期	平面のベクトル	図形と方程式
2学期	空間図形とベクトル	平面のベクトル
	複素数平面	空間図形とベクトル
3学期	行列	行列
	2次曲線	2次曲線

代数幾何の重点的な教育活動を空間認識の体得を目指して、「空間内の平面と直線」を単元の1つとして組み入れた。

2 授業の内容と構成の工夫

	「代数幾何」　3単位
1学期前半	①　平面上のベクトル 1 有向線分・演算 2 成分 3 内積、なす角 4 位置ベクトル 5 ベクトル方程式
1学期後半	6 ベクトルと図形 ②　空間図形とベクトル 1 空間における直線と平面 2 空間の点の座標、ベクトルと演算 3 位置ベクトル 4 ベクトルの成分、内積 **平面の決定・位置関係** **図形の方程式・応用教材**
2学期前半	5 2直線のなす角、2直線で決定する平面 2平面のなす角

(表2)

表2は実際に行った教育内容であるが、特に枠内の項目と2学期前半に実施した項目の内容について新しく導入したものである。当初の計画よりかなり進んだ理由として、枠内の授業計画に十分な時間と準備が必要であると予想され、授業内容の精選と指導の効率化をはかったからである。

そこで、数学Bの単元「空間のベクトルの成分、内積、位置ベクトル」を終えて、空間における直線と平面について大まかに整理を行った。以下、

1) 平面の決定

① 同一直線上にない3点は、平面を決定する。

② 1直線とその上にない1点は、平面を決定する。

③ 交わる2直線は平面を決定する。

④ 平行な2直線は平面を決定する。

2) 2直線の位置関係

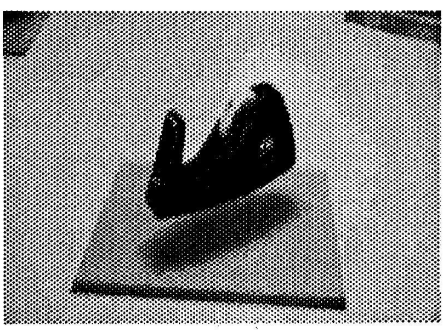
ねじれの位置、2直線のなす角、垂直

3) 直線と平面の位置関係

平行、交わる(交点)、垂線の足、三垂線の定理

4) 2平面の位置関係、平行、交わる(交線)、2平面のなす角、垂直である。厳密な証明には取り組んでいないが、一通りの内容について説明に1時間程割いた。

次に、この単元が**「日常生活の中の科学技術」**とどのように関連するのかを体現させるために「3Dアート」を取り入れることにした。以後の学習指導結果は「3Dアートトリック」の理解を第一の主眼とした内容である。





提供：明祥印刷、Jリーグエンタープライズ社

	実施	内　容
1時間目	7/1	平面の決定、直線と平面の位置関係、2平面の位置関係
2時間目	7/2	平面の方程式(法線ベクトル)　※平面ベクトルの「直線の方程式」の復習
3時間目	7/3	平面の方程式の決定、直線の方程式　※直線の「ベクトル方程式」の復習
4時間目	7/16	平行でない2平面の交わり、直線と平面の交点の座標、点と平面との距離
5時間目	7/18	3Dアートについて(Jリーグの広告・Zign-up・道路標識)　※逆遠近法

詳細は、

1時間目

① 同一平面上にない3点、

② 1直線とその上にない1点、

③ 交わる2直線、

④ 平行な2直線、平面の垂線について、2平面のなす角について

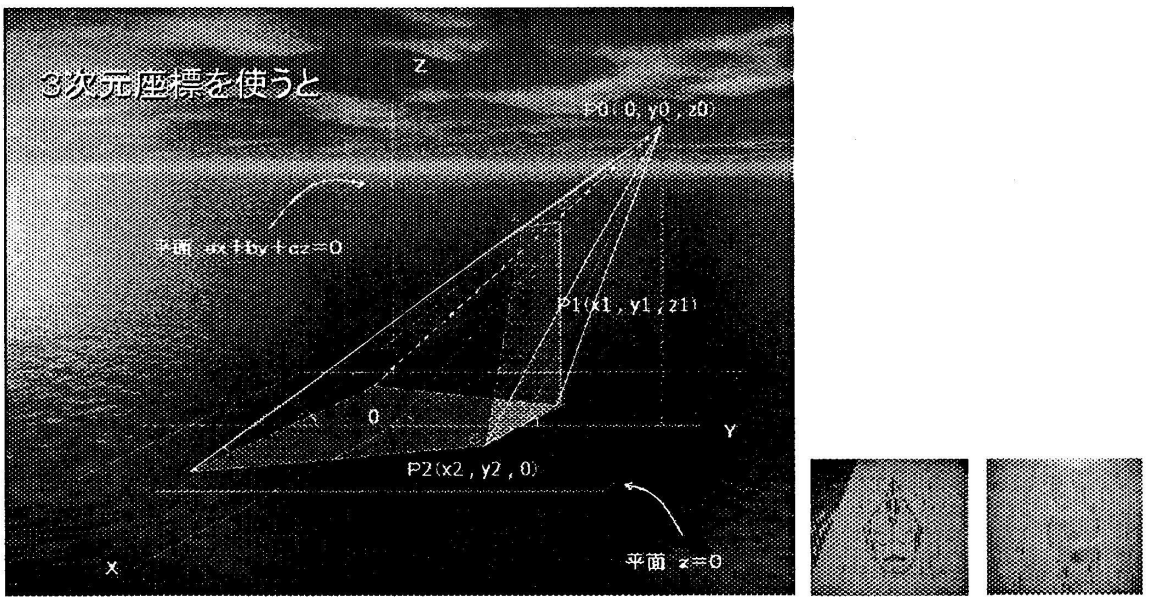
2時間目

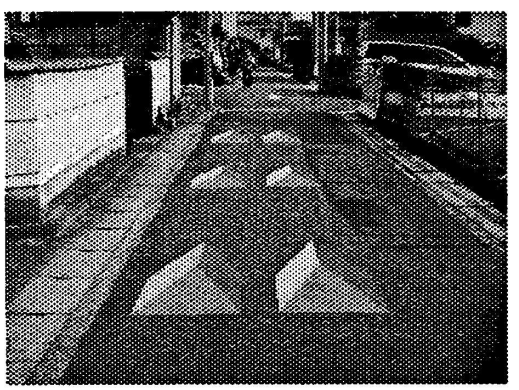
$$\vec{n}\bullet(\vec{p}-\vec{a})=0 \quad \rightarrow \quad ax+by+cz+d=0$$

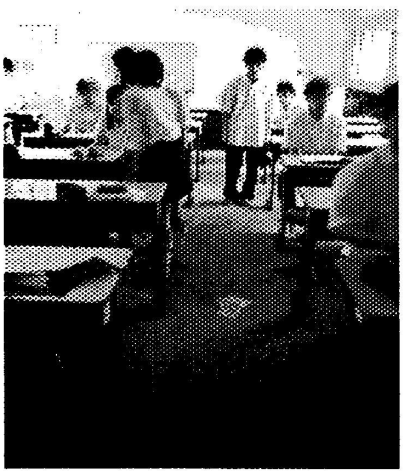
3時間目 $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d} \quad \rightarrow \quad \dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}=\dfrac{z-z_1}{c}$

4時間目 媒介変数表示(数学B教科書・問題集)の問題を具体的な図形の方程式に表現することを目指して解く説。

5時間目 映像を交えて3Dアートの構造について解説





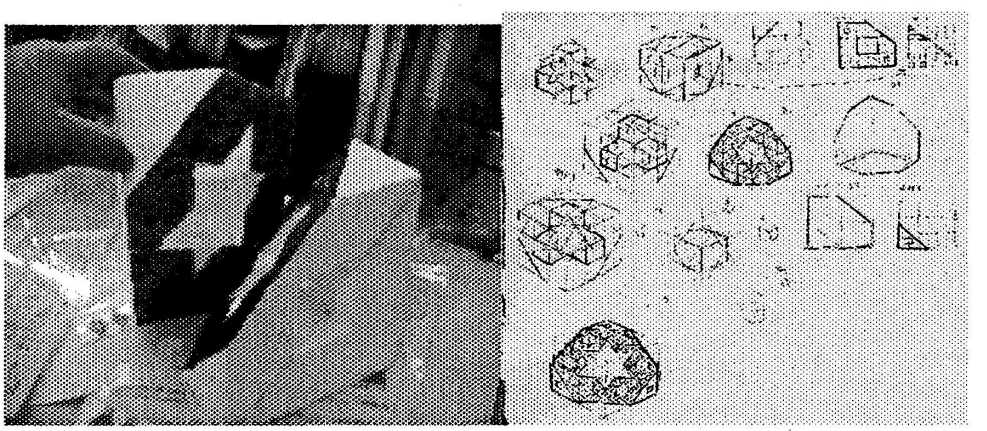


(展示資料・生徒作品・活動の様子)

3　生徒の様子と考察

平面のベクトルを終えた後で、三角形の内心の教材で色んな三角形、四角形で作った折鶴、四角形の重心、立方体の断面図問題を、テスト返却時等の中でトピックスとして考えさせたときに、数学Ⅰ・Aで学んだ平面幾何や三角比の知識を抵抗もなくこれらの幾何問題に取り組んだ者が多く存在した。このことから、図形や幾何に対するイメージを大切にした指導を心がけ、空間ベクトルにおいての直線や平面の方程式、交点の座標や点と平面の距離などの問題への取り組む姿勢はかなり前向きであった。感想の中に、数学Bの知識では問題の意図としていることのイメージが難解であったものが、具体的な直線や平面の方程式を学んだことで、問題の意味するところが明快に分かり、苦もなく解けて感動したという意見を得た。

(図は生徒のスケッチ)



以下は1学期期末考査にて出題した問題である。

①2点A$(0, 1, 4)$、B$(1, 0, 6)$を通る直線の方程式を求めよ。(ただし、媒介変数表示をせずに)

②平面$x = -1$と直線ABとの交点の座標を求めよ。

③点Aと平面$2x - y + 2z + 2 = 0$との距離を求めよ。

④点$(2, -1, 3)$を通り、$\vec{n} = (3, 2, 1)$を法線ベクトルとする平面の方程式を求めよ。

⑤3点A$(3, 2, 4)$、B$(3, -1, 1)$、C$(5, 3, -3)$を通る平面の方程式を求めよ。

全て完全解答とし、各問の正答率はそれぞれ①77%　②77%　③54%　④79%　⑤33%であった。

本単元の内容「3Dトリックアート」を通して生活の中にある科学技術を「数学」の目を通して、解析することができる感動を彼らの数々の作品の中から感じた。また、「数学的遠近法」についての資料が欲しいと申し出た生徒が約10名現れ、さらに同じ教材を地域の小学生向け科学実験教室で取り扱うのでボランティアスタッフを募集したところ、4名の希望者が出た。これらは、数学教育の枠を越えて「理科・科学技術大好きプラン」の理念に大いに貢献した科学教育教材としての効果もあった。また空間における直線と平面を扱う際にも、具体的な方程式に踏み込んだ内容としても十分な結果が得られたと考える。⑤の正答率の低さに

ついては、期末考査が他の分野の出題も多くあり、解答時間が足らなかったということである。ただ今回で感じたことは

① 空間での直線と平面の関係の学習指導において4時間費やしたこと
② 指導する深度が十分であったか③コンピュータプログラムを駆使しての変換については来年度もさらに検討を深め、より良い改善を目指し続けていくことが課題である。

4 まとめと展望

空間ベクトルの利用で直線や平面を媒介変数のみで表現した問題を取り扱う際に、多くの生徒はイメージを浮かべるのに苦労する。それは、空間での直線と平面の位置関係を指導する時間が十分に取れてこなかったということと、平面のベクトルでの図形の方程式と空間においての図形の方程式との比較指導を、どの辺りまでの内容に止めるのかの加減が難しいからである。現行の「数学B」では生徒が実際に問題集の問題を解いてみて「何を解いたのか」を生徒があまり分かっていない者が多いのではないかと考える。

さらに新しい「数学B」では授業時間数削減で仕方がないにしろ、「数学B」において空間ベクトルの内容が削られた形になっている。将来の科学技術を担う人材を育成する為には空間把握が必要な概念の1つであるということは、周知のことであろう。そこで今回の取り組んだ「日常にある数学」を目標にして、単元のどの分野を教えれば目標に到達し得るのかを指導する側が工夫し、生徒に道筋を示してやれば落ち着いて学習に取り組めるのではと考える。本校SSHの数学教育活動は、他校の理数系の指導にも役立ち反映できるような指導法・教材作りも目指している。そのために今後はカリキュラム開発の動きは活発になり、多くの教材開発を進めようと考えている。

引用・参考文献

[1] 秋山武太郎 著、春日屋伸晶 改訂、わかる立体幾何学改訂、日新出版、1966年10月
[2] 横地 清、遠近法で見る浮世絵、補章 数学的遠近法に関する作図と性質、三省堂、1995年8月
[3] 高橋 睦男 他6名 著、四訂版 高等学校 代数・幾何、数研出版、平成3年3月