

数学学習における意識の格差について

(数学科1回生に対する調査より)

小 野 祐 三 郎

On the Gap of Consciousness between High School and
University Students with Regard to Mathematics Study

—An Investigation into the Opinion of Freshmen in the Mathematical Course—

Yuzaburo Ono

Received September 29, 1989.

抄 録： 本学の一回生に対して開講されている「基礎数学」は、高等学校までの数学と大学で学ぶ数学との間隙を埋めるものである。ここでは、今まで簡単に扱われてきたものとか、公式として単純に考えていたものとかに対して、その意味をより深く考察することを目的としている。実際、学生達にとって高等学校までの数学に対する考え方と、大学での数学に対する考え方との間には、大きなギャップがあると考えられる。これについて、特に数学の直観性と論理性について学生の意見を引用して考察する。

索引語： 直観, 論理, 高校生の数学観

Abstract: The subject called "Basic Mathematics" is offered to freshmen in the mathematical course to make up for the gap between the mathematics study which they had in senior high school and that which they are going to have in university. In this subject we try to make students think more deeply and know the meaning of what they learned superficially in senior high school simply as mathematical formulas without understanding their complicated mathematical theory. There seems to exist a big difference in the attitude of university students toward mathematics study from that which they had in senior high school. In this paper we investigated into this difference, especially with regard to the intuition and the logic in mathematics, using the opinion of students in the first mathematical course as our reference materials.

Key Words: intuition, logic, mathematics study

は じ め に

本学数学科では、1987年度から数学科1回生に対して「基礎数学」という科目を設定している。この科目は表題の如く、高等学校までの数学と、大学で学ぶ数学との空隙をうめるものであり、小学校、中学校、高等学校における算数、数学で簡単に扱われているもの、また、あたりまえと思われているもの、さらに定理あるいは公式として、その意味を深く考慮することなく生徒に強要(?)しているもの等、について、それをより深く考えることとか、正確にその意味を表現することとか、さらに高等学校までの数学に対する考え方と、いわゆる数学に対する考え方の相異について等を、特に近い将来教師として、小学校、中学校、高等学校の児童、生徒を指導してゆかねばいけない立場にある数学科の新入生に対して、相互啓発、また意識改革の意味を含めて、数学科教官全員が種々の形式で担当している。

今年度(1989年度)でやっと3年目をむかえたにすぎないが、(もちろんのことではあるが)高等学校までの数学しか体験していない新入生に対して、ある程度の成果はあげていると思われる。

そして、1回生終了時、それはわずか1年間だけではあり、ただ数学という学問の入口の門の前に立って、その偉大な門を見上げただけにすぎないが、大学において数学という学問に接してきた学生諸君の高等学校までの数学と、大学での数学における意識の格差についてレポートを書いてもらった。

それらをもとにして、現在の高等学校生徒に対する意識を推し量り、また1年間の経験を通しての意識の変化を考察してみよう。

昭和48年4月1日より施行の学校教育法施行規則により高等学校の学習指導要領における数学の目標として、

「事象を数学的にとらえ、論理的に考え、総合的、発展的に考察し、処理する能力と態度を育成し、また、社会において数学の果たす役割について認識させる。

このため、

1. 数学における基本的な概念、原理・法則などを理解させ、より進んだ数学的な考え方や処理のしかたを生み出す能力と態度を養う。
2. 数学における基本的な知識の習得と基本的な技能の習熟を図り、それらを的確かつ能率的に活用する能力を伸ばす。
3. 数学的な用語や記号を用いることの意義について理解を深め、それらによって数学的な性質や関係を簡潔、明確に表現し、思考を進める能力と態度を養う。
4. 事象の考察に関して、適切な見通しをもち、抽象化し、論理的に思考する能力を伸ばすとともに、目的に応じて結果を検討し、処理する態度を養う。
5. 体系的に組み立てていく数学の考え方を理解させ、その意義と方法について知らせる。」

となった。

ここでは、数学の論理性を強調し、基本的な概念、原理・法則等の理解を深め、さらに、それらを的確に活用出来る能力を伸ばすことを主たる目標としている。

ところが、昭和 57 年 4 月 1 日より施行の学校教育法施行規則によれば、目標として、
「数学における基本的な概念や原理・法則の理解を深め、体系的に組み立てていく数学の考え方を通して、事象を数学的に考察し処理する能力を高めるとともに、それを活用する態度を育てる。」

とあるように、非常に簡単になり、特に、その中に論理性という言葉がなくなっている。

実際、昭和 48 年度施行の際には、数学を、数学一般、数学Ⅰ、数学ⅡA、数学ⅡB、数学Ⅲ、応用数学として、その中の数学一般、数学Ⅰに「論理」という項目を設置している。一方昭和 57 年度施行の際には、数学Ⅰ、数学Ⅱ、代数・幾何、基礎解析、微分・積分、確率・統計とし、その中からは「論理」という言葉が完全に消えている。

数学における論理性について、これを数学史にみると、「18 世紀までの数学者は、ほとんどといってよいくらい、他の領域においても優れた学者であった。たとえば哲学者、物理学者、天文学者であると同時に、数学者でもあるというふうに。これは、学問の分化がそれほど著しくなかった時代においては当然のことであるが、研究領域のはるかに拡大した 19 世紀においては、純粋数学のみで優に一生の仕事とするに足る事態となった。したがって、昔日のような多方面にわたる万能学者はあらわれにくくなった。」(武隈良一著・数学史・培風館)。そして、19 世紀に入ると、現代数学の始祖とよばれている GAUSS (1777～1855) が、数学のあらゆる分野に偉大な業績を残し、解析学における FOURIER (1768～1830)、CAUCHY (1789～1857)、WEIERSTRASS (1815～1897)、代数学における GALOIS (1811～1832)、ABEL (1802～1829)、幾何学における RIEMANN (1826～1899)、KLEIN (1849～1925)、さらに集合論における CANTOR (1845～1918) 等、現代数学が登場してくるのである。そして 20 世紀に入り HILBERT (1862～1943) による公理主義が確立し、数学はますますその実用性から抽象化への道を進み始めたのである。しかし現代、それは 1900 年に HILBERT の提出した「Mathematische Probleme」に述べられているように、細分化された巨大な数学は、また統合されようとしている。

ここで見るように、現代数学の歴史は他の自然科学系の学問に対して比較的新しいと言える。はるかな古代から始まった数をかぞえるといった原始的な算数から、現代にいたるこの複雑怪奇な数学の全貌をとらえることは、短期間ではもちろん不可能である。

小学校における四則演算を中心とした算数に論理性を求めることは無理であるだろう。すなわち、小学校の算数においては、論理よりも直観を重視し、その実用性に重点をおくべきであると考えられる。さらに中学校の数学においても直観を重視し、さらに三角形の合同、相似等の直観的な図形による定理、証明といった論理的な指導が必要となってくるが、ここでもむしろ直観が重視されている。しかし、図形における直観的な想像力の他に、論理的な創造力も若干必要とするのではないだろうか。しかし、後にも述べるように、これらも現在は単なる通過儀礼とみなされているような気持がする。そして高等学校の数学においては、より以上に論理性を重視していかなければいけないと思われるが、実際問題として、その教材の豊富さ(何しろ、古代ギリシャから、17 世紀の NEWTON (1642～1727)、LEIBNIZ (1646～1716) による微分、積分までも含んでいる)のため、その論理性は犠牲にされ、直観に頼らざるを得ない現状である。そのため大学に入り、19 世紀、20 世紀の論理的な数学に接して、多くの学生諸君はとまどいを感じるであろう。このことについて、学生諸君の意見を参考にして、より詳しく述べてみよう。(以下、文中“……”とされているところは、学生の意見である。)

よくいわれているように、自然科学系の学問について、例えば、物理、化学、生物、地学等のいわゆる理科部門は、高等学校までの教材の中に、19世紀まではもちろんのこと、20世紀における成果を含んでいると思う。しかし、数学に関していえば、高等学校までの教材には18～19世紀までの成果しか表れてこない。このことについて、カジョリはその著「初等数学史」において、「中学校や高等学校の初年級では、極限を粗雑に、しかもまったく直観的に取り扱うべきであって、それ以上は不可能である。」と述べているが、それは事実であるだろう。実際、極限について、高等学校では、限りなく大きくなる、限りなく近づく、といった言葉で表現しているが、例えば、 $a_1 = 1, a_2 = 2, \dots, a_{99} = 99, a_{100} = 0, a_{101} = 101, \dots, a_{199} = 199, a_{200} = 0, \dots$ 、一般に、 $a_n = n$ ($n \neq 100$ の倍数)、 $a_n = 0$ ($n = 100$ の倍数) のとき、この数列 $\{a_n\}$ は限りなく大きくなるといいきっていいのだろうかといった疑問点が生じてくる。このことを明確に表すために、大学初年度において正確な極限の概念が導入されてくる。つまり高等学校までにおいて、例えば極限の概念だけに限っていても、あいまいに、かつ直観的に取り扱われてきたものが、急に論理性を帯びてくることにより、あるとまどいを感じるのである。まず、“ $\forall, \varepsilon, \exists, \delta$ といった記号におおおろし”，そして、“あたり前だと思って今までやってきたことに証明があり、なぜこんなわかりきったことを難しく証明しなければいけないのか”といったことに対して大きな不透明さを感じるのである。“大学での数学は高校までの数学とは違う” というのはどこに原因があるのであろうか。このことは、その立場によって正しいともいえるし、また、誤りであるともいえる。例えていえば、実数という立場に立てば、方程式 $x^2 + 1 = 0$ は解を持たないが、複素数という立場に立てば、これは解を持っている。このような立場の違いは、小学校における負でない整数から有理数(分数)への導入、中学校における、負の数の導入、中学校から高等学校にかけての無理数の導入、そして高等学校における複素数の導入等である。ところが、その立場が実数であるにせよ、複素数であるにせよ、0で割ってはいけないという事柄は正しい。我々が常識で「数」だと考えているときは普通実数までである。虚数、すなわち、2乗して負となるということを常識のカテゴリーに入れることには、やはり一寸した抵抗がある。

実際、小学校、中学校、高等学校において、上記のように新しい立場に立って物事を考えねばいけないときには、それを学ぶ側にとって多少の抵抗があるといえる。しかし、それらの導入に際して、例えば小学校における分数の際には、「 $\frac{1}{2}$ とは1つのものの半分である。」とか、「 $\frac{1}{3}$ とは、3つにわけたうちの1つである。」というように、その理解の大半が小学生の常識の範囲で取り扱われている。また中学校における負の数の場合にも、温度計であるとか、ある向きを考え、その逆の向きを考えさせることにより導入を容易にしている。しかし、この負数の概念の導入も歴史的にみると、「実に19世紀の中頃までは、負数に関する題目が学校代数で適当に説明されなかったのである。ここで疑問は自然におこらざるを得ない。数の概念をひろげて負数を含めることが、なぜそのように困難であったのか？ その理由は、次のように考えられる。それは数学者が、負数の視覚的または幾何学的表示を思いつくまでは、負数は不条理な数、または仮想的な数として、彼等に映じていたからである。」(カジョリ・初等数学史)とあるように、驚くべきことに今日中学校で、ほとんど無条件にうけいれられている負数の概念が、比較的最近まで学校教育でとりあげられていなかったという事実である。しかし、今日では上記したように、数直線、または温度計等により視覚的に導入され、その理解を容易にしていることに注意すべきである。

さらに無理数の場合も、ピタゴラスの定理を利用して、例えば、 $\sqrt{2}$ は辺の長さを1の直角2等辺三角形の斜辺の長さであるとして導入している。ここでも、中学生の常識と視覚によって、

その導入を容易にしている。さらに例えば、負数と負数の積が正数となるとか、負数と正数の積が負数になるとかといった演算においても、その導入に色々な工夫がなされ、その理解を感覚に訴えている。

ところが、高等学校における複素数の導入に際しては、いわゆる我々の身のまわりに、2乗して負になるという具体的な現象が存在しないため、いささか強引ともいえる方法を用いてはいるが、これはある意味では仕方のないことかも知れない。また、上記の数の拡張以外、新しい概念として、文字式、方程式、ベクトル、行列、極限、微分、積分……等があるが、行列を除いてはいずれも視覚に訴えている。特に極限、さらにそれを利用した微分、積分は直観に訴えている部分が多く見られる。ところが行列に関しては、その和、積等の演算に関して、ただ形式的に公式化して考えている。特に、行列の積に関しては、素直に定義された和と比べて、いかにも不自然な方法で定義されている。このことは、小学校における分数の積の素直さ（すなわち、分母どうし、分子どうしをかける）に比べて、和は通分をして行うという不自然さに共通するものであろう。しかし、分数の和においては、その不自然さを図を用いることにより、小学生に無理なく理解させているのではないであろうか。ところが、行列の積では、その不自然さに対するカバーが、小学校の分数の和ほど丁寧に説明はされず、半ば強制的に取り扱われている。そのとき高校生にとって、なぜ行列の積は和と同様に素直に定義しないのかという疑問はうまれてこないであろうか。しかし、これも一つの大きな関門でもあり、また障害でもある大学入試にとっては不必要な知識であるかも知れないという一種の防衛反応かも知れない。

このように、小学校における数学は算数といわれているように、負でない整数と有理数の計算と、それに関する応用問題に終始している。また、中学校においても、文字が導入されているとはいえ、本質的には数の計算である。しかしわずかに、中学校において図形の性質、すなわち、三角形、円等のユークリッド幾何学によって、数学の論理をかいまみているにすぎない。しかし、これも単なる通過儀礼とみなされている。そのため、高等学校までの段階においては、数学イコール計算であり、数学とは与えられた条件をいかに上手く利用して問題を解くかという技巧面のみが強調されているように思える。このように、高等学校までの数学は、その立場上、数の複雑な計算に、若干の論理性を加味しているといえる。さらに、これらもほとんどの場合がパターン化され、いわゆる大学入試をいかに解くかに必要な数学になっている。これらのことが、よけいに大学入試における難問、奇問をうむ悪循環をひきおこしているであろう。

学生にとって、“各単元に必ず「よくでる問題」があり、その演習が勉強であった”とか、“高校までは本当に高等算数だ。定理をやみくもに憶えて、それを問題に適應させるだけの単純な算数だ。”と感じ、“今思うに、高校の数学は計算中心の数学であった。あたりまえであると定義した、いや教師によって定義されたものを信じこませて、そして生徒側も何も考えず信じて数学の教科書を開いている。”や、“高校生の時の数学はあまり「なぜ」ということは追求しなかった。それだけにのみこみやすかった。半面、いまいち納得できないところもあった。そういう時はひたすら公式にかえて（定義ではなくて）、いつのまにか納得できなかったことが「あたりまえ」になってしまった。特に「何のためにこんな公式があるのだろう」と思ってどんな本を見てもなんら触れていないことがよくあった。“というように、“いわゆる数学での常識という観念で固まってしまい、そこから一步も動けない。そして最悪なことに、今度は本当のことが理解できなくなってしまう。”といったことが学生諸君にとっての現状であろうと思われる。

さらに、多くの学生が、次のような疑問を持っている。“高校で大学入試問題を教室のみんな

がいっせいに解くようになる頃、数学の問題の答は一つしかなかった。だから、数学のどこが好きかと尋ねられても、はっきりと「答が一つだけしかないところ」と答えられたのである。国語のように、人物の立場にたって心情を考え、この指示語は前の文章のどこを指していて……等と深く考えた上、100字以内で述べるといった作業はまったくなかったからである。例えば、Aという答を出すために使う、 a , a' , a'' ……といった手段がすべて手元にあり、Aという答は、 a , a' , a'' ……の手段の向こうにうすばんやりと見えているところが数学、という気がしていた。”とか、“高校の数学がまさに真の数学であり、大学ではこの数学に肉づけしてゆくものだと思うた。”ということである。ここで最初の意見にある、数学はその答がきちんと求まり、国語とか英語のように、その答に多面性がないという疑問は、実際、学生（特に新入生）に接してよく聞く。この数学における答が唯一つ、例えば、 $3+2$ は誰が何といっても5であるということは、国語に例えていえば、小学校における漢字の書き取りにあたるのではないであろうか。「山」はあくまで「山」であり、決して「冂」ではない。このように極端ないい方をすれば、高等学校までの数学においては、漢字の書き取りに相当する段階をやっているのみである。従って、その答は唯一通りに決る。ところが人物の心情を考えて答を出すといった過程は、数学でいえば、論理的に考えるという過程である。そのことに対しては、上記したように、中学校において、ユークリッド幾何が出てくるが、ほとんど通過儀礼的に取り扱われ、逆に有名私立中学、高校の入試として特別視されているのが現状ではないであろうか。このように通過儀礼的に取り扱われた「論理」に対して、いわゆる計算好きや、パターン化された問題を解くのに慣れきった高校生が、大学における数学の講義に直面したときに最初にとまどうのである。つまり大学へ入るやいなや、突然その論理が未知のヴェールをかなぐりすてて学生の前に姿をあらわしてくる。例えば極限における、 $\varepsilon-N$ であり、高等学校においては、非常に具体的に見えるベクトルと違って、抽象化されたベクトル空間等である。さらに上回生に進んでゆくににつれ、集合、写像、連続、位相、群……等、極度に抽象化された世界を眼のあたりにしたとき大いなるとまどいを持つのである。そのことに対して恐怖心を持つのは当然のことであると思う。しかし、その場合、過去の高等学校までの数学で学んできた方法という殻にとじこもって一步も足を踏みだせない場合が多々みられる。しかし、学生の中には高等学校時代、その数学の先生から“大学の数学と高校までの数学とは完全に違う”と聞かされていた者も少なくはない。あくまでもそのことに対して、第2の意見のような感じを持っているのであらうと思える。

大学で数学を学ぶためには、上記したように高等学校時代に計算が好きであるとか、パターン化された問題が好きであるとかというよりも、なぜそうなのか、なぜそんなことを考えねばいけないのかというように、あらゆることに「なぜ」という疑問を持つような態度が必要である。

極端な例ではあるが、例えば、 $1+1=2$ を知っていて、 $2+3$ を計算できるのではなく、なぜ $1+1$ が2になるのかという疑問を持つ態度が必要である。一方、昔誰かが「数学の門をくぐるときは、すべての常識を捨てよ」といったように、いわゆる常識外というか、常識をこえたようなことがしばしばあらわれる。

例えば、演算において、高等学校までは、 $ab=ba$ というように積の可換性は常識であるが、代数学においては、むしろ $ab \neq ba$ が普通であり、特に $ab=ba$ が成り立つとき、可換群、可換環、……等とよんで逆に特別視している。高等学校までで、数学において表れる非可換の例はわずか一つ、行列の積だけである。

その他、極度に抽象化された位相の概念や、一方抽象化されているとはいえ、具体的なものに

還元しなくてはいけない線形代数の概念等、まさにその千変万化にとまどうのである。従って、大学で数学を学ぶためには、大学入学時にまず、高等学校までに学んできたあらゆる数学の常識を捨て去り、改めてそれらを取捨選択して再編成させなければいけない。そのためには、それをするに足る柔軟な態度と、またその反面、本質を見極めてゆくという頑固な態度という二つの矛盾すると思われる資質が必要となってくる。

19世紀末、集合論の創始者であるCANTORが、「数学の本質はまさにその自由さにある。」といった言葉は重要である。

最後に、いみじくもある学生が次のようにいっている。“今の家庭教師の子供に、「何でこうなるのか」と聞かれて「こうなるのが決っているからだ」と答えることしかできなかった。”といった言葉につきるのではないであろうか。さらに“答を求め出してゆくものでも、徹底した論理をつみ重ねて、その結果として答が出てくるのである。”そして、“大学で学ぶ数学というものは、高校までに学習した部分部分の数学を一つにつなぎあわせ、数学全体像というものをつかみとるのではないであろうか”という学生の言葉をこの稿に終りに持てきたい。

参 考 文 献

1. 高等学校学習指導要領：昭和46年10月：文部省
2. 高等学校学習指導要領：昭和53年8月：文部省
3. カジョリ（小倉金之助補訳）：初等数学史 上下 昭和45年：共立出版
4. 武隈良一：数学史：昭和34年：培風館
5. 小堀憲：数学史：昭和31年：朝倉書店
6. 小野祐三郎：大学での数学：平成元年：数研出版