

静最適操作の最適性

——操作量を線形に含む非線形制御系の最適制御問題に対する考察——

勝 間 昭 一 郎

Optimality of Static Optimal Control

——Optimization of Nonlinear Control System with Control

Variables Appearing Linearly——

Shoichiro KATSUMA

Received April 26, 1973

1. 緒 言

この論文では操作量を線形に含む状態方程式

$$\frac{dx}{dt} = g(x) + F(x)u(t), \quad u(t) \in \Omega \text{ (コンパクト集合)} \quad (1.1)$$

に対し、同種の操作量を線形に含む目的関数

$$J = \int_{T_1}^{T_2} P(x, u) dt, \quad P(x, u) = g_0(x) + \langle f_0(x), u \rangle \quad (1.2)$$

を最大にする最適制御問題を考える。

一般に最適制御問題はこれを大きく動最適と静最適との二つに分類することができる。前者は (1.1) 式を付帯条件とする (1.2) 式の変分問題である。この動最適制御問題において、特に時間的变化を無視した場合、すなわち状態量・操作量とも一定である場合を静最適制御問題と呼んでいるが、それは $g(x) + F(x)u = 0$ なる条件のもとに $P(x, u)$ を最大 (小) にするといった単なる関数の条件付極値問題である。したがって後者は前者の特別の場合とみることができる。しかもまた静最適点——状態量・操作量ともに一定という条件のもとに、対応する操作量が許容範囲 Ω に属する範囲内で $P(x, u)$ を最大 (小) ならしめる状態点——が (1.1), (1.2) 式に対する正準方程式の危点 (平衡点) になっているといった関係等から、操作時間が十分長いときには、操作開始後と終了前の短時間を除いて、その大部分の時間を静最適点における静最適操作に費やすのが動的な意味でも最適であると一般に考えられているようである。すなわち次の関係が成り立つものと考えられている：

$$\boxed{\text{動最適}} = \boxed{\text{過渡状態 (操作開始後)}} + \boxed{\text{静最適}} + \boxed{\text{過渡状態 (操作終了前)}}$$

そしてこの関係は状態量・操作量がともに1個の系に対しては肯定された⁴⁾。しかし操作量が2個以上の系に対しては一般に肯定し得ない実例が存在し、両者の間には我々の直感的な予測を越えた複雑な関係が横たわっているようである。

一方我々は前に多変数操作量を線形に含む非線形制御系の最適制御問題における最適操作量の少なくとも一部が許容範囲 Ω の内部にあるならば、その部分に対する最適軌道に沿って

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial u_i} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial u_j} \right) \right\} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial u_k} \left\{ \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial u_k} \right) \right\} \geq 0 \end{cases} \quad \text{for all } i, j, k \quad (1.3)$$

の成り立つことをみた⁵⁾。

そこでこの論文では、状態量・操作量がともに n 個の系に対し、まず静最適と動最適との関係を追求し、次に最適操作量の少なくとも一部が許容範囲の内部にあるならば、その部分はどんな種類の操作であろうかといった問題を考え、最後に (1.3) 式の各式に上述の静最適制御問題に関連した物理的な意味を与える。

2. 問題の定式化

n 個の操作量を線形に含む n 次元非線形制御系

$$\frac{dx}{dt} = g(x) + F(x)u(t) \quad (2.1)$$

ここに $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t)) \in \Omega$ (コンパクト集合), $g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$; $F(x) = (f_{ij}(x))$; $i \downarrow j \rightarrow 1, \dots, n$ は正則; $g_i(x), f_{ij}(x)$ は x の各成分に関して2回連続微分可能な関数とする,

に対し、同種の操作量を線形に含む目的関数

$$J = \int_{t_1}^{t_2} P(x, u) dt, \quad P(x, u) = g_0(x) + \langle f_0(x), u \rangle \quad (2.2)$$

ここに $f_0(x) = (f_{01}(x), \dots, f_{0n}(x))$; $g_0(x), f_{0i}(x)$ は x の各成分に関して2回連続微分可能な関数とする,

を最大にする最適制御問題を考える。

3. 静最適制御問題

まずもっとも素朴な最適問題である静最適制御問題を考える。前に述べたように、“静”とは状態量・操作量ともに時間的な変化をしないという意味である。するとこの場合の問題は (2.1) 式で $dx/dt=0$ とおき、すなわち

$$g(x) + F(x)u = 0, \quad u \in \Omega \quad (3.1)$$

なる条件のもとに、(2.2) 式の被積分関数 $P(x, u)$ を最大ならしめる点 (x, u) を求める問題となる。さて (3.1) 式より

$$u = -F^{-1}(x)g(x) \quad (3.2)$$

を得るから、 $P(x, u)$ は

$$P(x, u) = g_0(x) - \langle f_0(x), F^{-1}(x)g(x) \rangle \quad (3.3)$$

と x のみの関数となる。以下これを $\tilde{P}(x)$ とおく。我々は、対する (3.2) 式からの操作量が許容範囲 Ω に属する範囲での $\tilde{P}(x)$ の最大点、すなわち静最適点 x^* は孤立極大点でただ一つ、対する静最適操作量 u^* は許容範囲 Ω の内点になっているとする。すると

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{P}(x^*)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 \tilde{P}(x^*)}{\partial x^2} \text{ は負定値} \end{cases} \quad (3.4)$$

が成り立つ。

4. 動最適制御問題

(2.1) 式の条件下で (2.2) 式を最大にする動最適制御問題を解くのに、Pontryagin の最大原理を適用する。よく知られているように、最適操作量は Hamiltonian

$$\begin{aligned} H(x, \varphi, u) &= P(x, u) + \langle \frac{dx}{dt}, \varphi \rangle \\ &= g_0(x) + \langle f_0(x), u \rangle + \langle g(x) + F(x)u, \varphi \rangle \\ &= \Phi(x, \varphi) + \langle \Psi(x, \varphi), u \rangle \end{aligned} \quad (4.1)$$

ここに

$$\begin{cases} \Phi(x, \varphi) = g_0(x) + \langle g(x), \varphi \rangle \\ \Psi(x, \varphi) = f_0(x) + F(x)\varphi \end{cases} \quad (4.2)$$

また $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ は補助変数ベクトルである、を最大にする。そして最適軌道は正準方程式

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \varphi} \\ \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases} \quad (4.3)$$

を満たす。なお我々の考えている系は自律系であるから、停留軌道に沿って

$$H(x, \varphi, u) = \Phi(x, \varphi) + \langle \Psi(x, \varphi), u \rangle = \text{const} \quad (4.4)$$

が成り立つ。

さて $H(x, \varphi, u)$ は u に関して線形であるから、一般に Ω の境界上で最大値を取る。しかし $H(x, \varphi, u)$ の u に関する係数 $\Psi(x, \varphi)$ のいくつかの成分がある有限時間 $I = [t_1, t_2]$ ($T_1 \leq t_1 < t_2 \leq T_2$) に亘って消失する所謂“特異な場合”には、最適な u の値をこれからは決定し得ない。

一方我々の仮定より静最適操作量は Ω の内点である。したがって静最適と動最適との関係を論じるには、上述の特異な場合において特に u のすべての係数が消失する、すなわち

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \Psi(x, \varphi) = f_0(x) + 'F(x)\varphi = 0 \quad \text{for all } t \in I \quad (4.5)$$

が成り立つ場合を考えればよいことになる。そしてこの状態はまた

$$\frac{d^k}{dt^k} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) = \frac{d^k \Psi}{dt^k} = 0 \quad (k=0, 1, \dots) \quad (4.6)$$

とも書き得る。ここで以後の目的のために、左辺の $k=1$ の場合を計算しておく次のようになる：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) &= \frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} \\ &= A(x, \varphi) + B(x, \varphi)u \end{aligned} \quad (4.7)$$

ここに

$$\begin{cases} A(x, \varphi) = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \quad = \left(\frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{\partial('F\varphi)}{\partial x} \right) g(x) - 'F(x) \left(\frac{\partial g_0}{\partial x} + \frac{\partial('g \cdot \varphi)}{\partial x} \right) \\ B(x, \varphi) = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{'\partial \Psi}{\partial \varphi} - ' \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{'\partial \Psi}{\partial \varphi} \right) \\ \quad = \left(\frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{\partial('F\varphi)}{\partial x} \right) F(x) - ' \left\{ \left(\frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{\partial('F\varphi)}{\partial x} \right) F(x) \right\} = -'B(x, \varphi) \end{cases} \quad (4.8)$$

ところでこの特異な場合の Hamiltonian における補助変数 φ は (4.5) 式より x の関数として

$$\varphi = -'F^{-1}(x)f_0(x) \quad (4.9)$$

とあらわされる。したがって特異な場合の Hamiltonian は x の関数とみなし得るから、それを $H_s(x)$ とおくと

$$\begin{aligned} H_s(x) &= [H(x, \varphi, u)]_{\varphi(x, \varphi)=0} = \Phi(x, \varphi(x)) \\ &= g_0(x) - \langle F^{-1}(x)g(x), f_0(x) \rangle \end{aligned} \quad (4.10)$$

となる。そしてこれは静最適における目的関数と同じものである。なお (4.4) 式より停留軌道に沿って

$$H_s(x) = g_0(x) - \langle F^{-1}(x)g(x), f_0(x) \rangle = \text{const} \quad (4.11)$$

が成り立つ。かくて我々は次の定理を得る：

定理 1 静最適の目的関数と動最適における特異な場合の Hamiltonian とは同じものであり、したがって静最適の目的関数は動最適の特異な場合の停留軌道に沿って一定となる。すなわち特異な場合の停留軌道は静最適の目的関数の等高曲線である。

5. 動最適における特異な場合の目的関数

以上の考察より、我々の取り扱っている特異な場合の J の値 J_s は、(4.1) 式に (4.9) 式と定

理 1 を用いると

$$\begin{aligned} J_s &= \int_{t_1}^{t_2} P(x, u) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ H_s(x) - \left\langle \frac{dx}{dt}, \varphi(x) \right\rangle \right\} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \tilde{P}(x) dt - \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} \varphi(x) dx \end{aligned} \quad (5.1)$$

と書き得る。ところが特異な場合の停留軌道は $\tilde{P}(x)$ の等高曲線であった。したがって (5.1) 式の第 1 項は $\tilde{P}(x)$ の最大点、すなわち静最適点で最大値を取る。

6. 最適操作量が許容範囲の内部にある場合の最適操作

6.1 静最適操作の最適性

既にみたように、許容範囲 Ω の内部で最適操作量を考えるということは、(4.5) 式を満たす特異な場合を考えることであり、その場合の補助変数 φ は (4.9) 式より x の関数とみなし得た。そこでいま (4.5) 式を x について微分すると

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} + \left[\frac{\partial(F(x)\varphi)}{\partial x} \right]_x = -F(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (6.1.1)$$

ここに $[]_x$ は $[]$ 内に含まれる φ は (4.9) 式で定められた x の関数であることを示す、を得る。したがって特異な場合における (4.8) 式の $B(x, \varphi)$ は

$$[B(x, \varphi)]_x = -F(x) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) F(x) \quad (6.1.2)$$

と変形される。一方

$$\frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) \right\} = B(x, \varphi) \quad (6.1.3)$$

である。ところが緒言で述べたように、最適操作量が許容範囲の内部にあるならば、最適軌道に沿って $\left[\frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) \right\} \right]_x$ は零行列なるを要した。したがって最適操作量が許容範囲の内部にあるならば、最適軌道に沿って

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (6.1.4)$$

が成り立つ。そしてこれは (5.1) 式の第 2 項の被積分関数 $\varphi(x) dx$ が完全微分、すなわち

$$-dQ(x) = \varphi(x) dx \quad (6.1.5)$$

となる x の関数 $Q(x)$ が存在することを示している。それゆえこの場合には、(5.1) 式はさらに

$$J_s = \int_{t_1}^{t_2} P(x, u) dt = \int_{t_1}^{t_2} \tilde{P}(x) dt + \{Q(x(t_2)) - Q(x(t_1))\} \quad (6.1.6)$$

と書ける。そしてこの式の右辺の第 2 項は途中の径路には関係しない。それゆえ 5 節での考察より、 $\tilde{P}(x)$ が大となるほど J_s も大となることが予想され、したがって静最適点での静最適操作が最適となるであろうことが期待できる。事実、それは次のようにして肯定される：

我々がいま取り扱っている特異な場合は、操作を許容範囲の内部で考える場合であるから、古典変分法によっても処理し得るはずである。すなわち (5.1) 式に対する Euler の微分方程式を

つくと

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{dx}{dt} = \text{grad } \tilde{P}(x) \quad (6.1.7)$$

となる。そしてこの方程式は、(2.1) 式から u を求め、(4.7) 式を 0 とおいた式に代入したものと一致し、したがって特異な場合の停留軌道は Euler の微分方程式の解曲線となっていることが容易に示される³⁾。

ところがいまの場合、最適軌道に沿っては (6.1.4) 式が成り立っているから、(6.1.7) 式の dx/dt の係数は 0 となり、最適軌道は $\tilde{P}(x)$ の極大点、すなわち静最適点に退化する。かくて我々は次の定理を得る：

定理 2 最適操作量の少なくとも一部が許容範囲の内部にあるならば、その部分は静最適操作である。

なお以上の考察から次のことがわかる：

最適操作量が許容範囲の内部にあるための必要条件 (1.3) 式の第 1 式は、特異な場合の補助変数 φ が完全微分、したがって特異な場合の J の値 J_s が途中の径路に関するものは静最適の目的関数の項に対してのみであり、最適軌道は静最適点であることを示している。

6.2 静最適点の存在

最後に我々の取り扱っている特異ということの定義式から、静最適点の存在に対する条件を求めておこう。静最適点の存在に対する必要条件は (3.4) 式より

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial x^2} \text{ は負定値} \end{cases} \quad (6.2.1)$$

であった。一方前にみたように、最適操作量が許容範囲の内部にある場合には、(4.7) 式において $B(x, \varphi) = 0$ が最適軌道に沿って成り立つことが必要であったから、(4.7) 式は最適軌道に沿って

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) &= \frac{d\Psi(x, \varphi)}{dt} = A(x, \varphi) \\ &= \left(\frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{\partial(F(x)\varphi)}{\partial x} \right) g(x) - F(x) \left(\frac{\partial g_0}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} \varphi \right) \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

となる。ところで特異な場合、(6.2.2) 式における φ は、(4.5) 式より x の関数とみなし得たから、(6.2.2) 式の右辺の第 1 項は、(6.1.1) 式を用い、(6.1.4) 式に注意すると

$$\left[\left(\frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{\partial(F(x)\varphi)}{\partial x} \right) g(x) \right]_x = -F(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} g(x) = -F(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} g(x) \quad (6.2.3)$$

と書ける。次に (6.2.2) 式の右辺の第 2 項を計算する。定理 1 より

$$\tilde{P}(x) = H_s(x) = \Phi(x, \varphi(x)) \quad (6.2.4)$$

であったから、これを x で微分すると

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \frac{\partial g_0}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} \varphi(x) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} g(x) \quad (6.2.5)$$

を得る。したがって (6.2.2) 式の右辺の第2項は

$$\left['F(x) \left(\frac{\partial g_0}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} \varphi \right) \right]_x = 'F(x) \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} - 'F(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} g(x) \quad (6.2.6)$$

と書ける。それゆえ (6.2.2) 式, (6.2.3) 式, (6.2.6) 式より

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) \right]_x = -'F(x) \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} \quad (6.2.7)$$

を得る。そしてこれからさらに

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) \right]_x \right\} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-'F(x) \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} \right) \frac{dx}{dt} \\ &= - \left(G(x) + 'F(x) \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial x^2} \right) (g(x) + F(x)u) \end{aligned} \quad (6.2.8)$$

$$\text{ここに } G(x) = \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial f_l}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x_l} ; i \downarrow j \rightarrow 1, 2, \dots, n \right);$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{d}{dt} \left\{ \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) \right]_x \right\} = -'F(x) \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial x^2} F(x) - G(x) F(x) \quad (6.2.9)$$

を得る。したがって (6.2.1) 式を考慮すると、静最適点の存在に対する必要条件は最適軌道に沿って

$$\begin{cases} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) \right]_x = 0 \\ \frac{\partial}{\partial u} \frac{d}{dt} \left\{ \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) \right]_x \right\} \text{は正定値} \end{cases} \quad (6.2.10)$$

となる。ところが

$$\begin{aligned} &\left[\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) \right]_x - \frac{d}{dt} \left\{ \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) \right]_x \right\} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) \right\} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right) \right\} \frac{d\varphi}{dt} \right]_x - \left(\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right) \right]_x \right\} \frac{dx}{dt} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) \right]_x \right\} \frac{d\varphi(x)}{dt} \right) = \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right) \right\} \right]_x \left(\left[\frac{d\varphi}{dt} \right]_x - \frac{d\varphi(x)}{dt} \right) \end{aligned} \quad (6.2.11)$$

と書け、一方 (4.3) 式, (6.1.1) 式, (6.2.5) 式を用いると

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\varphi}{dt} \right]_x &= - \left\{ \frac{\partial g_0}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} \varphi(x) \right\} - \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial x} + \left[\frac{\partial ('F(x)\varphi)}{\partial x} \right]_x \right\} u \\ &= - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} (g(x) + F(x)u) \\ &= - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{dx}{dt} + \frac{d\varphi(x)}{dt} \end{aligned} \quad (6.2.12)$$

が成り立つゆえ

$$\left[\frac{d\varphi}{dt} \right]_x - \frac{d\varphi(x)}{dt} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{dx}{dt} - \text{grad } \tilde{P}(x) \quad (6.2.13)$$

を得る。そしてこの式の右辺を0とおいたものは Euler の微分方程式 (6.1.7) にほかならない。それゆえ最適軌道に沿って

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) \right]_x = \frac{d}{dt} \left\{ \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) \right]_x \right\} \quad (6.2.14)$$

が成り立つ。かくて我々は次の定理を得る：

定理3 最適操作量が許容範囲の内部にある場合、静最適点が考えている領域の内点として存在するための必要条件は、最適軌道に沿って

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) \right\} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) \right\} \text{は正定値} \end{cases} \quad (6.2.15)$$

の成り立つことである。

なおこれから、最適操作量の少なくとも一部が許容範囲の内部にあるための必要条件 (1.3) 式の第2式は、 $\tilde{P}(x)$ の局所的最大の条件 (6.2.15) 式の第4式の必要条件になっていることがわかる。

7. 結 言

我々は最適操作量の少なくとも一部が許容範囲の内部にあるならば、その部分はどうな種類の操作か、またその場合の条件式 (1.3) の物理的な意味はといった問題を、状態量と操作量の個数が等しい系について考察した。そしてその場合の最適操作は静最適操作であり、また、条件式 (1.3) 式の第1式は静最適操作が最適なることを、第2式は静最適点の存在に対する必要条件を示していることがわかった。

しかし一般に条件式 (1.3) の第1式が成立するのは、操作量が2個以上の系では稀であるとみられるので、多変数操作量を線形に含む系では、緒言で述べたような最適制御の型は殆ど期待し得なく、一般には許容範囲の境界値を取る操作のみからなる制御が最適になるであろうと考えられる。終わりに、日頃御指導を賜わっている京都大学数理工学教室の樫木義一先生、布川晃先生、および有益な御討論をいただいた島公脩先生に深謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) 布川：非線型制御系の最適制御；京大数理解析研究所研究会 (1967)
- 2) 布川：操作量を線形に含む非線型制御系の最適制御；京大数理解析研究所講義録 48 (1968)
- 3) Shima, M. & Sawaragi, Y.: On the optimality of the boundary control for non-linear control system with controls appearing linearly; Int. J. Control, **13**, 1 (1971)

- 4) 榎木, 布川, 勝間：操作量を線形に含む1次元非線形制御系の最適制御問題；システムと制御, **15**, **2** (1971)
- 5) 榎木, 布川, 勝間：境界操作が最適となる条件について——多変数操作量を線形に含む非線形制御系の最適制御問題に対する考察——；システムと制御, **15**, **7** (1971)

Summary

In the optimization problem of nonlinear control system with multiple control variables appearing linearly, previously, we obtained the condition under which at least a part of the optimal control is inside the admissible region of the control.

Then, in this paper, for n dimensional nonlinear control system with n control variables appearing linearly, we consider the problem of what type of the control is optimal, provided that the optimal control is inside the admissible region. And we obtain the result that the static optimal control is optimal among the controls taking their values inside the admissible region.