

Newton-Raphson 法についての注意

坂下 秀男・笹谷 文雄

A note on Newton-Raphson's method.

Hideo SAKASHITA and Fumio SASAYA

Received October 5, 1972

1. Newton-Raphson 法は方程式が $f(x)=0$ の形で与えられているとき、反復法で根の近似値を求める方法で、計算機にかけののに適しているから、電子計算機に最も活用される。

$f(x)=0$ は代数方程式でなくても、超越方程式にも適用できるし、 x が実数のときのみならず複素変数の正則関数の零点にも適用できる。正則関数に対する Newton-Raphson 法としては、つぎの結果が知られている。(1) 参照)

〔定理〕

$f(z)$ を z_0 の近傍で定義され、 $f(z_0)f'(z_0) \neq 0$, $h_0 = -\frac{f(z_0)}{f'(z_0)}$, $z_1 = z_0 + h_0$, 円 $K_0: |z - z_1| \leq |h_0|$ とする。

$f(z)$ は K_0 で正則で $\max_{K_0} |f''(z)| = M$, $2|h_0|M \leq |f'(z_0)|$ とする。そのとき

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

とおくと、 z_n は K_0 に属し、 $n \rightarrow \infty$ で $z_n \rightarrow \zeta$. ζ は K_0 における $f(z)=0$ のただ一つの根である。そして ζ は K_0 の境界上にあるのであれば単根である。そして

$$|\zeta - z_{n+1}| \leq \frac{M}{2|f'(z_n)|} |z_n - z_{n-1}|^2 \quad (n=1, 2, \dots)$$

ここでの目的はこの定理における z_n と z_{n+1} , さらに一般に

$$z_{n+1} = z_n - \frac{1}{p} \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \quad (p > 0) \text{ なる関係にある } z_n \text{ と } z_{n+1} \text{ との幾何学的関連について考察}$$

することである。

2. $f(z_0)f'(z_0) \neq 0$ のとき

$$z_1 = z_0 - \frac{1}{p} \frac{f(z_0)}{f'(z_0)} \quad (p > 0) \text{ とおく。}$$

〔定理〕

$$\text{曲面 } w = |f(z)|^p = F_p(x, y) \quad (p > 0) \dots \dots (1)$$

において、曲面上の点 $S_0(x_0, y_0, w_0)$ ($z_0 = x_0 + iy_0$, $w_0 = F_p(x_0, y_0)$) における (1) の接平面と xy 平面 (z 平面) との交線へ点 $P_0(x_0, y_0)$ よりおろした垂線の足が $p_1(x_1, y_1)$ ($z_1 = x_1 + iy_1$) である。

(証明)

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$F_p(x, y) = \{u(x, y)^2 + v(x, y)^2\}^{\frac{p}{2}}$$

として,

点 S_0 における接平面の方程式は

$$w - w_0 = \frac{\partial F_p(x_0, y_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial F_p(x_0, y_0)}{\partial y} (y - y_0) \cdots \cdots (2)$$

(2) と xy 平面との交線は

$$\frac{\partial F_p(x_0, y_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial F_p(x_0, y_0)}{\partial y} (y - y_0) = -w_0 \cdots (3)$$

以下 $F_p(x_0, y_0)$, $u(x_0, y_0)$, $v(x_0, y_0)$, $u_x(x_0, y_0)$, $v_x(x_0, y_0)$ を F_p , u , v , u_x , v_x と略記して

$$\frac{\partial F_p}{\partial x} = p(u^2 + v^2)^{\frac{p}{2}-1} (uu_x + vv_x)$$

Cauchy-Riemann の関係式より

$$\frac{\partial F_p}{\partial y} = p(u^2 + v^2)^{\frac{p}{2}-1} (uu_y + vv_y) = p(u^2 + v^2)^{\frac{p}{2}-1} (vu_x - uv_x)$$

したがって (3) は

$$p(u^2 + v^2)^{\frac{p}{2}-1} \{ (uu_x + vv_x)(x - x_0) + (vu_x - uv_x)(y - y_0) \} = -w_0 \cdots \cdots (3)'$$

また, 一方

$$x_1 = \operatorname{Re} \left\{ z_0 - \frac{1}{p} \frac{f(z_0)}{f'(z_0)} \right\} = x_0 - \frac{1}{p} \operatorname{Re} \frac{f(z_0)}{f'(z_0)} = x_0 - \frac{1}{p} \frac{uu_x + vv_x}{u_x^2 + v_x^2} \cdots \cdots (4)$$

$$y_1 = \operatorname{Im} \left\{ z_0 - \frac{1}{p} \frac{f(z_0)}{f'(z_0)} \right\} = y_0 - \frac{1}{p} \frac{vu_x - uv_x}{u_x^2 + v_x^2} \cdots \cdots (5)$$

(3)' の左辺の x, y にそれぞれ (4), (5) の x_1, y_1 を代入すると

$$-\frac{(u^2 + v^2)^{\frac{p}{2}-1}}{u_x^2 + v_x^2} \{ (uu_x + vv_x)^2 + (vu_x - uv_x)^2 \} = -(u^2 + v^2)^{\frac{p}{2}} = -w_0$$

すなわち, 点 (x_1, y_1) は直線 (3) の上にある。

また (4), (5) より

$$(x_1 - x_0) : (y_1 - y_0) = (uu_x + vv_x) : (vu_x - uv_x)$$

だから, 2点 $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$ を結ぶ直線は (3) と直交する。q. e. d.

Summary

In Newton-Raphson's method for finding a zero of a regular function

$w = f(z)$, we consider its geometric derivation.

For $f(z_0) \neq 0$, we set $z_1 = z_0 - \frac{1}{p} \frac{f(z_0)}{f'(z_0)}$ ($p > 0$),

then we have the following theorem.

[Theorem]

Let g be the section of xy plane (z plane) by the tangent plane to the surface

$$w = |f(z)|^p = F_p(x, y) \quad (p > 0)$$

at the point $S_0(x_0, y_0, w_0)$ ($z_0 = x_0 + iy_0$, $w_0 = F_p(x_0, y_0)$),

then the point $P_1(x_1, y_1)$ ($z_1 = x_1 + iy_1$) is the foot of the perpendicular from the point $P_0(x_0, y_0)$ on g .

参考文献

- ① 実用数字 清水辰次郎著 朝倉書店 (1962)
- ② 数値計算 一松 信著 近代数学新書 (1963)
- ③ 数値計算 I 新谷 尚義著 基礎数学シリーズ (1967)